

Differentialgeometrische Methoden für optische Verfahren zur Beurteilung von Skoliosen

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Mannheim

vorgelegt von

Dirk Reichel
aus Ludwigshafen am Rhein

Mannheim, 2006

Dekan: Professor Dr. Matthias Krause, Universität Mannheim
Referent: Professor Dr. Wolfgang K. Seiler, Universität Mannheim
Korreferent: Professor Dr. Günther Nürnberger, Universität Mannheim

Tag der mündlichen Prüfung: 13. April 2007

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Zusammenfassung	1
1 Skoliose	5
1.1 Die Krankheit	5
1.1.1 Arten von Skoliosen	5
1.1.2 Wirbelverformung	6
1.1.3 Auswirkungen	7
1.2 Die Diagnose	8
1.2.1 Äußere Anzeichen	8
1.2.2 Cobb-Winkel	8
1.2.3 Weitere Methoden	9
1.3 Die Therapie	10
1.3.1 Therapiemöglichkeiten	10
1.3.2 Krankengymnastik	10
1.3.3 Korsette	11
1.3.4 Operation	11
Literatur	11
2 Differentialgeometrische Hilfsmittel	12
2.1 Kurventheorie	12
2.1.1 Zulässige Parameterdarstellung und Kurvenlänge	12
2.1.2 Das begleitende Dreibein	13
2.1.3 Krümmung, Torsion und Frenet'sche Formel	14

2.1.4	Interpretation der Krümmung	15
2.2	Flächentheorie	17
2.2.1	Zulässige Parameterdarstellung und Flächenkurven	17
2.2.2	Erste Fundamentalform	18
2.2.3	Die zweite Fundamentalform	19
2.2.4	Mittlere und Gauß'sche Krümmung	20
2.2.5	Gleichungen von Gauß-Weingarten	22
	Literatur	23
3	Das Moiré-Phänomen	24
3.1	Wer war Moiré?	24
3.2	Interferenz	25
3.2.1	Intensität einer elektromagnetischen Welle	25
3.2.2	Überlagerung von Wellen	26
3.2.3	Interferenz zwischen ebenen Wellen	27
3.3	Der Moiré-Effekt	29
3.3.1	Darstellung der Gitter als Fourier-Reihen	30
3.3.2	Darstellung von Gittern beliebiger Struktur	33
3.3.3	Überlagerung zweier Gitter	34
3.3.4	Fazit	40
3.3.5	Parallelen zur Interferenz	40
3.4	Schatten-Moiré-Verfahren	42
	Literatur	45
4	Optische Diagnoseverfahren	46
4.1	Moiré-Topographie	46
4.1.1	Darstellung von Asymmetrien des Rückens mit Hilfe des Schatten-Moiré-Verfahrens	46
4.1.2	Differentialgeometrische Klassifikation	48
4.1.3	Fazit	51
4.2	Das ISIS-Verfahren	51

4.2.1	Der ISIS-Scanner	51
4.2.2	Auswertung der Daten	51
4.2.3	Ein völlig neuer Ansatz	54
4.3	Rasterstereographie	56
4.3.1	Ein einfaches Prinzip	56
4.3.2	Geometrie des Projektionsgitters	57
4.3.3	Rekonstruktion der Oberfläche	59
4.3.4	Flächendarstellung durch Coonspflaster	61
	Literatur	63
5	Untersuchung eines Modellrückens	65
5.1	Darstellung des Rückens	65
5.1.1	Funktionale Beschreibung	65
5.1.2	Lage und Form	67
5.1.3	Die Fläche zwischen den Querschnitten	68
5.2	Moiré-Topographie	70
5.3	ISIS-Verfahren	71
5.4	Rasterstereographie	74
5.4.1	Approximation der Fläche	74
5.4.2	Vergleich der Gauß'schen Krümmungen	76
	Literatur	79
A	Maple: Rückendarstellung	80
A.1	Querschnitte	80
A.2	Rückenfläche	81
B	Maple: Untersuchung	82
B.1	Modifiziertes ISIS-Verfahren	82
B.2	Sensibilität des Moiré-Verfahrens	83
B.3	Rasterstereographie	84

Einleitung und Zusammenfassung

Unter den ernstzunehmenden Verformungen der Wirbelsäule tritt die Skoliose am häufigsten auf. Die Ursache dieser Krankheit – eine Krümmung der Wirbelsäule bzw. eine Rotation der Wirbel – ist in der Regel unbekannt.

Aufgrund der spinalen Verformung verändert sich die Oberfläche des Rückens in unterschiedlicher Weise und mit unterschiedlichem Ausmaß. Diese Veränderung wird gewöhnlich erst bei Heranwachsenden entdeckt. Daher ist die Form des Rückens ein wichtiges Anzeichen zur Bewertung der Skoliose.

Um der Skoliose entgegenzuwirken, reicht in den meisten Fällen Krankengymnastik aus, nur selten brauchen die Patienten ein Korsett. Lediglich ein ganz geringer Anteil der Patienten erreicht den Punkt, wo ein chirurgischer Eingriff notwendig ist. Die Ziele der Operation sind, die Stabilität der Wirbelsäule zu stärken, die Lungen- und Organfunktionen, die durch die Krankheit beeinträchtigt werden, und das äußere Erscheinungsbild zu verbessern.

Die Behandlungsergebnisse sind umso besser, wenn die Behandlung so früh wie möglich erfolgt. Deshalb ist das Interesse an einer frühen Diagnose sehr groß. Auch die Effizienz der Behandlung wird gewöhnlich von einem Wandel der Rückenform widerspiegelt.

Da in den Jahren des Wachstumsschubs das Fortschreiten der Krankheit recht schnell ist und in kurzen, regelmäßigen Abständen eine Beurteilung notwendig ist, ist die Röntgenmethode der Wirbelsäule – wobei ein gewisser Cobb-Winkel gemessen wird – aufgrund der Strahlendosis nicht zu empfehlen, so daß eine nicht-invasive Alternative zur Beurteilung von Skoliose höchst wünschenswert ist.

Daher ist man zu Methoden der visuellen Betrachtung übergegangen, die auf der Untersuchung von Links-Rechts-Asymmetrien basiert.

Eine frühe Technik war die Messung mit Hilfe von Verformungen und Bewegungen von Sonden. Jedoch verlangte diese Methode vom Patienten eine gewisse Zeit ruhig zu verharren und die Ergebnisse hingen stark vom Geschick der untersuchenden Person ab.

Eine verlässliche Methode zur Analyse der Oberfläche des Rückens wurde viele Jahre gesucht. Mittlerweile werden eine Vielzahl von optischen Methoden zur Oberflächenberechnung benutzt. Das Hauptproblem liegt darin, die 3-dimensionale Rückenform mit einem 2-dimensionalen Bild darzustellen. Es ist wichtig, daß eine solche Darstellung einfach und eindeutig ist.

Welche Methoden auch angewandt werden, es ist die Genauigkeit, die Geschwindigkeit und die Wiederholbarkeit, die letztlich die Akzeptanz der Verfahren bestimmen. Die Diagnose schwerer Krümmungen ist relativ leicht, jedoch werden kleinere Verformungen leicht übersehen. Ein weiterer Schwachpunkt ist, daß die Messungen subjektiv bewertet werden und zwei Ergebnisse, die zeitlich auseinander liegen, nicht verglichen werden können.

Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, die Probleme bei der Diagnose von Skoliosen unter differentialgeometrischen Gesichtspunkten zu betrachten.

In **Kapitel 1** wird die Krankheit Skoliose und ihre Auswirkungen auf die Rückenform beschrieben.

Die gesunde Wirbelsäule hat bei der Betrachtung des Rückens von hinten einen geraden Verlauf. Eine Skoliose liegt dann vor, wenn ein Bereich der Wirbelsäule diese Lotlinie verläßt und sich zur Seite neigt. Dabei entstehen oberhalb und unterhalb dieses Bereiches kompensatorische Gegenkrümmungen der Wirbelsäule, da der Körper weiterhin bestrebt ist, die aufrechte Haltung zu bewahren.

Die Wirbelkörper an den Übergängen von der Hauptkrümmung in die Gegenkrümmungen heißen Neutralwirbel. Diese nehmen aufgrund der Druckverhältnisse eine rechteckige Form an, was bei der Bestimmung des sogenannten Cobb-Winkels eine wichtige Rolle spielt. Dieser Winkel kennzeichnet die Lage der beiden Neutralwirbel zueinander und gilt als Maß zur Beurteilung einer Skoliose.

Die anderen von der Skoliose betroffenen Wirbel behalten ihre Keilform. Daher kippen sie nicht nur zur Seite, sondern erfahren zusätzlich noch eine Drehung. Die mit diesen Wirbeln verbundenen Rippen werden durch diese Torsion ebenfalls gedreht. Aus diesem Grund flacht auf der einen Seite der Rücken ab und auf der anderen Seite entsteht ein sogenannter Rippenbuckel. Dieses Erscheinungsbild wird von den Patienten psychisch und kosmetisch als störend empfunden. In den schlimmsten Fällen können Herz, Lunge und andere Organe in ihren Funktionen beeinträchtigt werden. Glücklicherweise treten diese Fälle nur sehr selten ein.

Da die Therapiemöglichkeiten zu Beginn des Auftretens von Skoliose die besten Heilungschancen versprechen, wird die Notwendigkeit einer frühen Diagnose und einer regelmäßigen Kontrolle des Patienten offensichtlich.

Kapitel 2 beinhaltet eine kurze Einführung in die Differentialgeometrie. Die Kurven- und Flächentheorie bilden die Basis für die Auswertung der Untersuchungsmethoden, die in den darauffolgenden Kapiteln vorgestellt werden. Diese Diagnoseverfahren sollen unter differentialgeometrischen Gesichtspunkten betrachtet werden. Dabei sind hauptsächlich die Krümmung einer Raumkurve bei beliebiger Parametrisierung sowie die Gauß'sche Krümmung einer Fläche von besonderem Interesse.

In **Kapitel 3** wird detailliert auf die Entstehung des Moiré-Phänomens und auf dessen Parallelen zur Interferenz elektromagnetischer Wellen eingegangen. Dieses Phänomen ist eine Erscheinung, die sich schon chinesische Seidenweber zunutze machten, um Webfehler sichtbar zu machen. Diese Erscheinung läßt sich durch ein mathematisches Modell beschreiben.

Der Moiré-Effekt tritt dann auf, wenn Licht durch zwei übereinanderliegende Gitter dringt, die leicht versetzt beziehungsweise leicht geneigt zueinander sind. Ab einer gewissen Entfernung nimmt das Auge nicht mehr die ursprünglichen, einzelnen Gitterlinien, sondern ein anderes Muster wahr. Diese optische Täuschung weist oft eine wellenartige

Struktur auf. Beide Gitter werden im mathematischen Modell mit Hilfe von Fourier-Reihen dargestellt. Die Lichtdurchlässigkeit der übereinanderliegenden Gitter wird einfach durch das Produkt dieser beiden Reihen ausgedrückt (Kap. 3 [5]). Elementare trigonometrische Umformungen dieses Produkts führen zu einem Term, der das entstehende Moirémuster funktional beschreibt. Sowohl die Erscheinung als auch die funktionale Beschreibung des entstehenden Musters erinnert sehr stark an die Überlagerung elektromagnetischer Wellen.

Das Moiré-Phänomen kann man dazu benutzen, Oberflächen auf ihre Form hin zu untersuchen. Das Prinzip des sogenannten Schatten-Moiré-Verfahrens ist recht einfach. Eine Fläche wird durch ein in kurzem Abstand davor befindliches Gitter mit Licht bestrahlt. Der projizierte Schatten ist sehr scharf und verursacht als zweites virtuelles Gitter zusammen mit dem reellen Gitter ein Moirémuster. Dieses Muster ähnelt den Höhenlinien einer topographischen Karte und kennzeichnet wie bei solch einer Geländekarte in gleicher Weise die Höhenunterschiede der Fläche (Kap. 3 [2]).

Die mathematischen Ansätze und Ausführungen sind in der Literatur leider nur sehr knapp verfaßt. Daher wird in diesem Kapitel sehr genau die Überlagerung sowohl linienförmiger Gitter als auch Gitter mit beliebiger Struktur mathematisch beschrieben. Diese detaillierte Beschreibung zeigt das Zustandekommen der optischen Täuschung und welcher Zusammenhang zur Überlagerung ebener, elektromagnetischer Wellen besteht. Das Prinzip des Schatten-Moiré-Verfahrens liefert die Grundlagen für die sogenannte Moiré-Topographie. Aus diesem Grund ist es wichtig, daß hier ebenfalls sehr ausführlich auf dieses Verfahren eingegangen wird. Diese Gesamtbeschreibung des Moiré-Effektes ist also eine wichtige Literaturarbeit zum Verständnis späterer Betrachtungsweisen.

Drei verschiedene optische Verfahren, die es ermöglichen mit Hilfe der Differentialgeometrie eine Rückenoberfläche zu analysieren, werden in **Kapitel 4** beschrieben: Die Moiré-Topographie, das als in der Literatur bezeichnete ISIS-Verfahren und die Rasterstereographie.

Die Moiré-Topographie wurde von Takasaki entwickelt und ist ein angewandtes Schatten-Moiré-Verfahren, bei dem entstehende Höhenlinien Rückschlüsse auf die Rückenoberfläche zulassen (Kap. 4 [10]). Dabei wird der Rücken üblicherweise auf Links-Rechts-Symmetrie hin untersucht. Bei diesem Verfahren reagieren die resultierenden Moirémuster sehr sensibel auf geringste Veränderungen der gegenseitigen Lage zwischen der Fläche und dem Gitter (Kap. 4 [8]).

Eine Untersuchung jedoch in wie weit diese Muster – abhängig von der Position der Oberfläche zum Gitter – elliptische, parabolische und hyperbolische Punkte kennzeichnen ist zwar recht einfach, wurde aber bisher versäumt. Dieses Versäumnis wird hier nachgeholt.

Bei dem vom Oxford Orthopaedic Engineering Centre entwickelten ISIS-Verfahren wird der Rücken abgescannt, so daß die Daten mit Hilfe eines Rechners als dreidimensionales Bild ausgewertet werden können. Dabei wirft ein Projektor durch eine Blende einen ebenen Lichtstrahl auf den Rücken und die erscheinende helle Linie wird von einer Kamera erfaßt. Da die geometrische Anordnung zwischen Projektor und Kamera bekannt ist, kann die räumliche Information dieser Linie in einem Rechner gespeichert werden. Durch die Drehung des Projektors ergeben die gesammelten Daten zusammen ein Bild der gesamten Rückenoberfläche (Kap. 4 [11]).

Es wurden verschiedene Methoden entwickelt, um mit Hilfe des ISIS-Verfahrens eine Skoliose diagnostizieren zu können. Unter anderem wurden einzelne Wirbelkörper ertastet und Markierungen aufgeklebt (Kap. 4 [12]). Diese sogenannten Landmarken lassen

Rückschlüsse auf den groben Verlauf der Wirbelsäule zu, um daraus und aus den Neigungswinkeln der Querschnitte den für die Diagnose von Skoliose wichtigen Cobb-Winkel berechnen zu können. Jedoch ist diese Vorgehensweise nicht zufriedenstellend, da das Er-tasten sehr großes Geschick erfordert und die Ergebnisse stark von der untersuchenden Person abhängen.

Eine neue – vom Klinikpersonal unabhängige – Methode wird in diesem Kapitel vor-gestellt. Bei diesem Ansatz wird der Verlauf der Wirbelsäule durch eine Raumkurve dargestellt. Da die Neutralwirbel die Übergänge zwischen Hauptkrümmung und Gegen-krümmungen bilden, muß die Krümmung der Kurve dort zwangsläufig auch verschwin-den. Die Tangentialvektoren an diesen Stellen schließen dann den aussagekräftigen Cobb-Winkel ein.

Das Prinzip der Rasterstereographie beruht ebenfalls auf der Projektion eines Rasters auf eine Oberfläche. Im Gegensatz zur Moiré-Topographie befindet sich das Raster jedoch nicht direkt vor der zu untersuchenden Fläche, sondern auf einem weiter entfernten Dia (Kap. 4 [5]). Durch Unebenheiten der Fläche stellt sich das abgebildete Raster in Form von verzerrten Linien dar. Mittels einfacher Geometrie können wiederum die Lagen der projizierten Linien ermittelt werden (Kap. 4 [2]). Der Rücken eines Patienten wird bei der Rasterstereographie fotografiert und ein Rechner wertet diese Aufnahme aus. Aus diesem Bild wird nicht nur die Rückenfläche rekonstruiert, sondern auch für Diagnosezwecke eine farbige Krümmungskarte erstellt (Kap. 4 [13]).

Auf die Rekonstruktion der Fläche zwischen diesen Linien wird jedoch in der Literatur nicht eingegangen. Für die weiteren Betrachtungen ist aber eine komplette Flächendar-stellung unerlässlich. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle die Flächenberechnung mit Hilfe der sogenannten Coonspflaster gewählt. Diese Pflaster verbinden die Kurven der verzerrten Gitterlinien mittels einfacher Funktionen.

Kapitel 5 ist das Herzstück der vorliegenden Arbeit. Hier sollen die drei optischen Verfahren auf ihre Güte und Genauigkeit hin überprüft werden.

Die Idee, diese Überprüfung an einem eigens dafür entworfenen Modellrücken durch-zuführen, ist neu. Aufgrund von geschätzten Daten werden zunächst Querschnitte eines Rückens mit Hilfe kubischer Splinekurven dargestellt. Diese werden dann wiederum mit einer Schar kubischer Splinekurven miteinander verbunden.

Ein großer Vorteil des Modellrückens ist, daß sich dessen Oberfläche – im Gegensatz zu einem realen Patienten – nicht ändert. Daher kann die Moiré-Topographie hier in noch nie dagewesener Weise auf ihre Sensibilität hin untersucht werden. Es wird gezeigt, daß kleinste Änderungen der Lage zwischen Rückenfläche und Gitter unter Umständen große Auswirkungen auf die entstehenden Muster haben.

Um das modifizierte ISIS-Verfahren zu begutachten, wird eine Raumkurve durch die Datenpunkte gelegt, die dem Verlauf der Wirbelsäule folgen. Die Berechnung sowohl der Stellen verschwindender Krümmung, als auch des daraus resultierenden Cobb-Winkels führen zu zufriedenstellenden Ergebnissen.

Ebenfalls gute Resultate liefert bei der Rasterstereographie die Approximation mittels Coonspflaster, obwohl dabei lediglich ein sehr grobes Raster auf das Rückenmodell pro-jiziert wird. Die Gauß'sche Krümmung sowohl des Modellrückens als auch der Coons-fläche unterscheiden sich auch nur sehr geringfügig. Lediglich an gewissen Stellen wirkt die Krümmungskarte der Coonsapproximation verzerrt.

Kapitel 1

Skoliose

In der Regel wissen viele Menschen, daß die Skoliose eine Verformung der Wirbelsäule ist. Jedoch haben die wenigsten genaue Kenntnis über das genaue Krankheitsbild. Daher werden hier die wichtigsten Aspekte aus diversen medizinischen Fachbüchern in Kürze zusammengefaßt. Insbesondere wird auf die Auswirkung einer Skoliose auf die Rückenoberfläche eingegangen.

1.1 Die Krankheit

1.1.1 Arten von Skoliosen

Die Skoliose (siehe Abbildung 1.1) ist ein lang bekanntes orthopädisches Leiden. Aufgrund der zunehmenden Verunstaltung des Körpers waren die Menschen schon immer um eine intensive Aufklärung und Behandlung dieser Erkrankung bemüht.

Bei Betrachtung des Rückens von hinten ist der Verlauf der gesunden Wirbelsäule gerade. Im Gegensatz dazu sind Skoliosen fixierte seitliche Wirbelsäulenverbiegungen. Die Wirbelkörper verlassen die Senkrechte und neigen sich zur Horizontalen, wobei jeder Wirbelsäulenabschnitt betroffen sein kann. Man spricht auch von strukturellen Skoliosen, um sie von den skoliotischen Fehlhaltungen, die auch als nichtstrukturellen Skoliosen bezeichnet werden, zu unterscheiden.

Skoliotische Fehlhaltungen können verschiedene Ursachen haben. Sie können unter anderem Ausdruck einer Beinlängendifferenz, eines Beckenschiefstandes oder einer schlechten bzw. bequemen Haltung im Stehen sein. Wenn die ursächlichen Faktoren wegfallen, so verschwindet auch die Fehlhaltung; es sei denn, sie waren so lange von Bestand, daß sich inzwischen organische Veränderungen an der Wirbelsäule eingestellt haben. Dann wird aus einer skoliotischen Fehlhaltung eine echte fixierte Skoliose [4].

Man kann Skoliosen der Form nach unterscheiden. Bei den C-förmigen Totalskoliosen ist das ganze Rückgrat auf eine Seite gekrümmt. Partielle Skoliosen betreffen nur Teile der Wirbelsäule und weisen eine Hauptkrümmung auf, der sich oberhalb und unterhalb kompensatorische Gegenkrümmungen anschließen [1]. Diese Gegenkrümmungen entstehen unter dem Bestreben des Körpers, die aufrechte Haltung zu bewahren. Sind zwei Hauptkrümmungen in entgegengesetzte Richtungen, vorhanden spricht man von einer

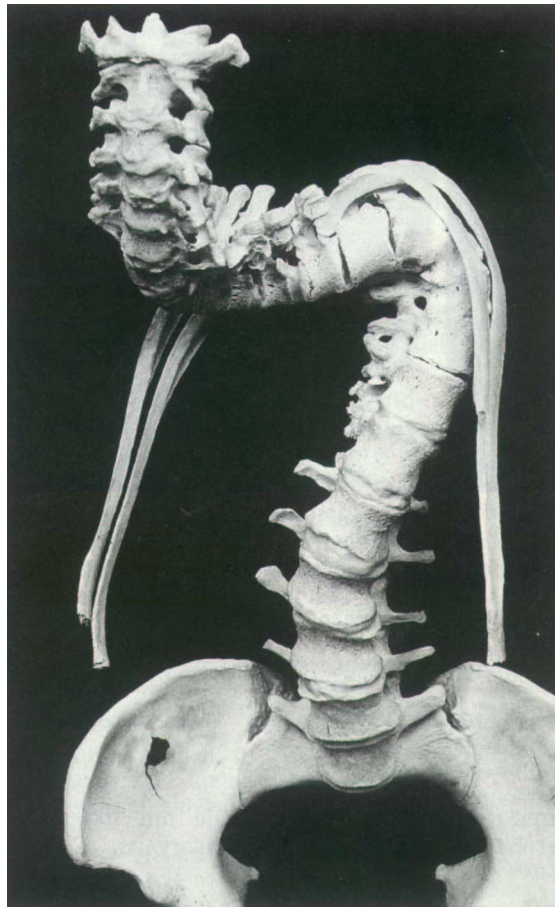


Abbildung 1.1: Skelett eines Patienten, der an einer schweren Skoliose erkrankt war [5].

S-förmigen beziehungsweise zusammengesetzten Skoliose. Je nachdem, ob die Hauptkrümmung nach rechts oder nach links zeigt, spricht man von einer rechts- oder links-konvexen Skoliose. Der Konvexseite liegt die Konkavseite gegenüber.

1.1.2 Wirbelverformung

Bei strukturellen Skoliosen liegt eine Verformung der Wirbel vor. Neben dem Ausbrechen der Wirbelsäule aus der Lotlinie geht eine Rotation der Wirbelkörper um ihre vertikale Achse einher. Dabei drehen sich die Wirbelkörper zur Konvexseite des Bogens und die Dornfortsätze, die normalerweise nach hinten gerichtet sind, drehen sich zur Konkavseite [9].

Der sogenannte Scheitelwirbel an der größten Seitabweichung ist am stärksten rotiert und nicht geneigt. Die Wirbel an den Übergängen von der Haupt- in die Gegenkrümmungen heißen Neutralwirbel. Diese sind am wenigsten rotiert, dafür aber am stärksten geneigt. Sie haben normale Rechteckform und der von den Grundflächen zweier Neutralwirbel gebildete Winkel – der sogenannte Cobbwinkel – gilt als ein Maß der skoliotischen Verbiegung (siehe Abbildung 1.3 auf Seite 9).

Durch die unterschiedliche Rotation der einzelnen Wirbel erfährt die Wirbelsäule an der Hauptkrümmung eine Torsion. Es ergeben sich unterschiedliche Druck- und Spannungen auf die oberen und unteren Wirbelabschlußplatten, was zum Schiefwuchs jedes rotierten Wirbels führt. Diese sind auf der konkaven Seite niedriger als auf der konvexen Seite.

1.1.3 Auswirkungen

Aufgrund der Wirbelkörperverdrehung kommt es zu einer Verformung des Rumpfes und damit auch zu einer Veränderung der Körperoberfläche. Im Bereich der Brustwirbelsäule werden die Rippen von der Wirbeldrehung mitgenommen (siehe Abbildung 1.2). Konvexseitig entsteht ein Rippenbuckel und vorne flacht der Brustkorb ab. Auf der Konkavseite werden die Rippen nach vorne gedreht, was zu einer Abflachung hinten (Rippental) und zu einer Verwölbung vorne führt. Daraus ergibt sich die typische asymmetrische Deformierung des Brustkorbes bei Skoliotikern. In der Lendengegend können die gedrehten Wirbel lediglich die Muskulatur mitnehmen. Daher entsteht auf der Konvexseite durch stärkeres Hervortreten der langen Rückenstreckmuskulatur ein sogenannter Lendenwulst.

Bei stark fixierten Skoliosen reichen die kompensatorische Krümmungen manchmal nicht mehr aus, um den Körper in der Lotlinie zu halten. Somit kommt es zu einem seitlichen Überhang des Oberkörpers. All dies kommt bei nichtstrukturelle Skoliosen nicht vor, denn sie weisen normale Wirbelstrukturen und keine Rotation auf.

Entsprechend der Form der oberen Brustkorbhälfte steht die konvexseitige Schulter höher und weiter nach vorne, die konkavseitige tiefer. Durch die Biegungen wird die Wirbelsäule scheinbar kürzer. Dadurch wird der Brustkorb dem Becken genähert, wobei die unteren Rippen in schweren Fällen zur Verlagerung, Deformierung und Funktionsstörungen von Herz, Lungen und Organen führen können [7]. Eine schwere Skoliose beeinflusst also den Gesamtorganismus. Die Atmung ist erschwert und die Anpassung des Kreislaufs an körperliche Anstrengungen wird verschlechtert. Darüber hinaus ist auch noch an die psychischen Auswirkungen der schweren Körperentstellung zu denken. Diese können häufig zu ernststen Störungen der seelischen Harmonie und zu Veränderungen von Charakter und Persönlichkeit führen [3].

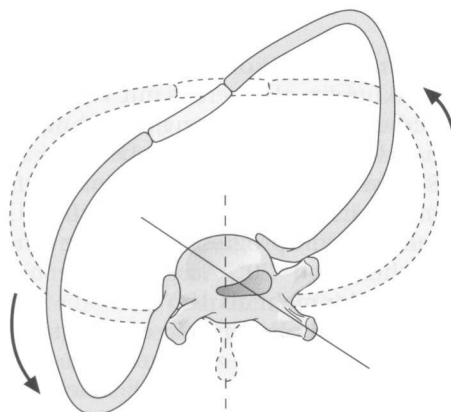


Abbildung 1.2: Wirbelrotation bei der Skoliose [7].

Angaben über die Häufigkeit von Skoliosen sind nicht einheitlich, jedoch sind die wenigsten Fälle behandlungsbedürftig.

Nur wenige Skolioseerkrankungen lassen ihre Herkunft erkennen. Angeborene Skelettmißbildung, Muskelerkrankungen und ein gestörtes Gleichgewicht der Rückenmuskulatur können unter anderem Ursachen sein. Meistens ist die Ursache ihrer Entstehung unbekannt, man spricht daher von einer idiopathischen Skoliose.

Strukturelle Skoliosen treten fast ausschließlich am wachsenden Skelett auf. Im Wachstumsalter insbesondere während der Pubertät haben sie eine starke Tendenz sich zunehmend zu verschlechtern. Nach Abschluß des Wachstums nimmt die Verkrümmung nur noch geringfügig zu. Sie bleibt jedoch fixiert, da die verkrümmten Wirbelsäulenabschnitte schnell versteifen.

1.2 Die Diagnose

1.2.1 Äußere Anzeichen

Skoliosen entwickeln sich im Wachstumsalter erst allmählich und sind zu diesem Zeitpunkt noch schmerzfrei. Daher wird die anfangs nur minimale Deformität meist zufällig durch andere Personen entdeckt. Erst im weiteren Verlauf können – in den glücklicherweise wenigsten Fällen – schlimme Verunstaltungen und funktionale Störungen der Organe auftreten. Eigentliche Beschwerden, abgesehen von dem psychisch und kosmetisch meist störenden Erscheinungsbild, treten selten auf.

Der Verlauf der Dornfortsatzreihe zeigt die Seitverbiegung. Die Markierung der Dornfortsätze und deren Abweichungen aus dem Lot läßt in vielen Fällen das Vorliegen einer Skoliose erkennen. Da sich diese jedoch rotationsbedingt auf die Konkavseite drehen, sind Abweichungen erst ab einem gewissen Krümmungsgrad von außen erkennbar, das heißt das tatsächliche Ausmaß der Skoliose kann weitaus größer sein.

1.2.2 Cobb-Winkel

Im Röntgenbild erscheinen die seitlichen Verbiegungen stärker ausgeprägt. Für die Beurteilung einer Krümmung der Wirbelsäule wurden verschiedene Methoden der Winkelmessung entwickelt. Die Messung nach Cobb hat sich weitgehend etabliert, obwohl sie nicht mehr als ein verhältnismäßig grobes Maß ist [2]. Die Winkelgrade werden anhand von Röntgenuntersuchungen sorgfältig registriert, um bei Vergleichskontrollen ein Fortschreiten oder einen Behandlungserfolg erkennen zu können. Daher müssen die Aufnahmen genau standardisiert werden: Im Stehen wird die gesamte Brust- und Lendenwirbelsäule von hinten beziehungsweise von vorne geröntgt. Beinlängendifferenzen, die ein Beckenschiefstand verursachen können, müssen vorher ausgeglichen werden.

Diese vergleichbaren Aufnahmen müssen in der Wachstumsphase in regelmäßigen Abständen ausgewertet werden, da innerhalb weniger Jahre schwere, irreversible Verkrümmungen entstehen können [2]. Bei einer echten Skoliose muß mit einer Verschlimmerung bis zum Wachstumsabschluß gerechnet werden. Daher ist eine frühzeitige Diagnose wünschenswert, um so gegebenenfalls eine geeignete Behandlung in die Wege leiten zu können.

Am oberen und unteren Ende einer Hauptkrümmung befinden sich die sogenannten Neutralwirbel. Diese Wirbel sind nicht keilförmig, sondern haben parallelstehende Deck- und Grundplatten. Der zwischen den Deck- beziehungsweise Grundplatten dieser beiden Neutralwirbel liegende Winkel wird als Cobb-Winkel bezeichnet (siehe Abbildung 1.3) und gilt als Maß für die Hauptkrümmung [8].

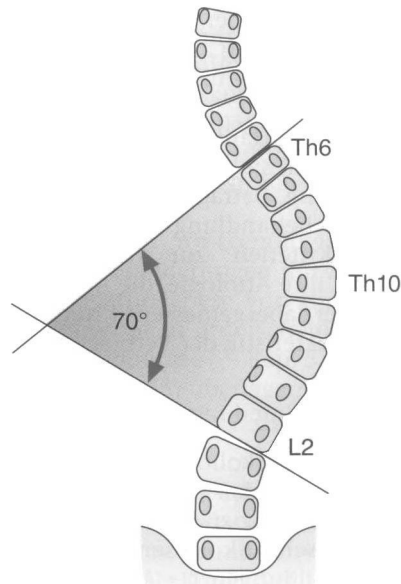


Abbildung 1.3: Winkelmessung nach Cobb [7].

1.2.3 Weitere Methoden

Die sogenannten Biegeaufnahmen sind spezielle Röntgenaufnahmen, bei denen sich der Patient nach rechts und nach links zur Seite beugt. Dadurch läßt sich diagnostizieren, ob eine Verkrümmung strukturell fixiert ist oder ob eine skoliotische Fehlhaltung vorliegt.

Aber auch ein Rippenbuckel, der beim gebückten Patienten am deutlichsten erkennbar ist, weist auf eine strukturelle Fixierung hin (siehe Abbildung 1.4). Im Gegensatz dazu verschwinden kompensatorische skoliotische Haltungen beim Sitzen, zum Beispiel etwa bei einem Beckenschiefstand infolge einer Beinverkürzung.

Jedoch muß die seitliche Wirbelsäulenverkrümmung schon ein gewisses Ausmaß erreicht haben, damit die rotations- und torsionsbedingte Deformation des Rumpfes deutlich wird. Unter anderem können sich die Räume zwischen dem Rumpf und den herunterhängenden Armen, die sogenannten Taillendreiecke, stark unterscheiden. Auch eine stärker hervorspringende Hüftpartie, ein Lendenwulst, eine ungleich hohe Stellung der Schulter und ein abstehendes Schulterblatt auf der Konvexseite sind deutliche Merkmale einer Asymmetrie. Relativ einfach läßt sich durch das Fällen eines Lots ausgehend von Hinterkopf einen Überhang, die Verlagerung des Brustkorbes auf eine Seite, zeigen.

Da die Skoliose auf die Körperoberfläche einen sehr großen Einfluß hat, kann deren Darstellung bei der Untersuchung zusätzliche Informationen liefern. Insbesondere die Abbildung der Oberflächenform des Rückens kann als Dokumentation für Kontrollunter-

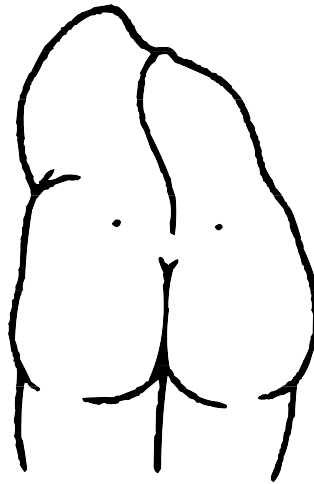


Abbildung 1.4: Rippenbuckel beim Vornüberneigen [2].

suchungen hilfreich sein, um Formveränderungen schnell zu erkennen. Deshalb bieten sich verschiedene optische Verfahren an, auf die später näher eingegangen wird.

1.3 Die Therapie

1.3.1 Therapiemöglichkeiten

Die Art der Therapie hängt von dem Alter des Patienten, dem Ausmaß der Verkrümmung und davon ab, ob mit einer Zunahme des Skoliosewinkels zu rechnen ist. Das Ziel der Behandlung ist, die Wirbelsäulenverbiegung zu korrigieren oder zumindest ein Fortschreiten zu verhindern. Kosmetische Gründe, die das ästhetische Erscheinungsbild des Patienten betreffen, können auch vorliegen.

Kleine Verkrümmungen werden ausschließlich krankengymnastisch behandelt mit dem Ziel die Rumpfmuskulatur zu kräftigen. Bei größeren Abweichungen aus dem Lot wird diese Therapie mit dem Tragen eines Korsetts erweitert. Nur in sehr schweren und seltenen Fällen muß der Patient operiert werden. Wichtig sind eine frühe Diagnose und eine Behandlung noch während des Wachstums.

1.3.2 Krankengymnastik

Die Beweglichkeit der Wirbelsäule kann mit Hilfe der Krankengymnastik erhöht werden oder erhalten bleiben. Eine wesentliche Verbesserung der Skoliose ist jedoch nicht zu erwarten und ein Fortschreiten dieser Krankheit läßt sich damit auch nicht aufhalten. In vielen Fällen aber kann sie eine Änderung des äußeren Erscheinungsbildes herbeiführen. Sie ist zur Muskelkräftigung sehr wertvoll und kann durch eine spezielle Atemtechnik nach Lehnert-Schroth ergänzt werden. Durch die Entfaltung des Brustkorbes wird indirekt eine Korrektur der Skoliose erreicht [3].

1.3.3 Korsette

Korsette korrigieren die Haltung mit Hilfe von fest eingebauten Druckpolstern. Konvexseitig wird auf den Scheitelwirbel und konkavseitig auf die Neutralwirbel der Krümmung Druck ausgeübt. Trotz ausgezeichneter Korrektur stellt sich nach der Abnahme des Korsetts meist der Anfangswinkel wieder ein. Aber die Behandlung ist geeignet, ein Fortschreiten aufzuhalten oder zu verzögern, wenn es über den gesamten kritischen Zeitraum getragen wird [7]. Daher sollte mit dieser Therapie nicht zu spät begonnen werden. Gleichzeitig jedoch schwächt ein Korsett die Rückenmuskulatur in kurzer Zeit derart, so daß der Patient immer mehr zusammensinkt. Deshalb müssen die Muskeln in krankengymnastischen Übungen und beim Sport ganz besonders trainiert werden.

1.3.4 Operation

Die Versteifung der Verkrümmung nimmt mit dem Alter und dem Grad der Skoliose zu. Auch eine operative Korrektur bedeutet Versteifung, jedoch werden dabei aus steifen, krummen Wirbelsäulen steife, gerade Wirbelsäulen gemacht [6]. Dazu werden Knochen-späne aus dem Becken, der Wirbelsäule selbst oder einer Rippe entnommen und an den Wirbel angelagert [6]. Bis die Wirbelsäule nach der Operation stabil geworden ist, dauert es viele Monate bis ein Jahr. In dieser Zeit muß die Korrekturstellung allerdings mit einer inneren Fixation aufrechterhalten werden [2]. Metallimplantate halten das Korrekturergebnis bis zur Versteifung der Wirbel. Bei diesen korrigierenden Implantaten werden Haken an den Wirbelbögen der Neutralwirbel befestigt, zwischen denen ein Stab angebracht wird, der eine Streckung bewirkt.

Zunächst sollten Krankengymnastik und Korsettbehandlung voll ausgeschöpft werden, um damit manchen Kindern eine Operation zu ersparen. Wo dies nicht gelingt, kann man versuchen ein Fortschreiten der Krankheit bis zu einem günstigeren Zeitpunkt zu verzögern. Wenn möglich sollte nicht zu früh operiert werden, da die Wirbelsäule dann nicht mehr weiterwächst und die Patienten klein bleiben.

Literatur zu Kapitel 1

- [1] Cotta Horst/Puhl Wolfhart. *Orthopädie*. Georg Thieme Verlag, Stuttgart 1993.
- [2] Debrunner Alfred. *Orthopädie*. Hans Huber Verlag, Göttingen 1994.
- [3] Exner Gerhard/Exner Gerhard Ulrich. *Kleine Orthopädie*. Georg Thieme Verlag, Stuttgart 1993.
- [4] Krämer Jürgen. *Orthopädie*. Springer Verlag, Heidelberg 1998.
- [5] Niethard Fritz/Pfeil Joachim. *Orthopädie*. Hippokrates Verlag, Stuttgart 1997.
- [6] Reichelt Achim. *Orthopädie*. Ferdinand Enke Verlag, Stuttgart 1993.
- [7] Rössler Helmut/Rüther Wolfgang. *Orthopädie*. Urban & Schwarzenberg Verlag, München 1997.
- [8] P. J. M. Scholten/A. G. Veldhuizen: Analysis of Cobb angle measurements in scoliosis. *Clinical Biomechanics* **2** (1987).
- [9] H. Zilch/U. Weber. *Lehrbuch Orthopädie*. Walter de Gruyter Verlag, Berlin 1989.

Kapitel 2

Differentialgeometrische Hilfsmittel

In den folgenden Kapiteln spielt die Kurven- und Flächentheorie der Differentialgeometrie eine große Rolle. Daher sind hier die wichtigsten Grundlagen so zusammengefaßt, daß es dem Leser keine Mühe bereitet, den kommenden mathematischen Argumentationen Folge zu leisten.

2.1 Kurventheorie

2.1.1 Zulässige Parameterdarstellung und Kurvenlänge

In der Differentialgeometrie ist die elementare, analytische Geometrie eng mit der Differential- und Integralrechnung verbunden. Im dreidimensionalen, euklidischen Raum kann ein Punkt mit seinen Koordinaten als Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Wenn ein Punkt eine Bahn im Raum durchläuft, ändert sich zu jedem Zeitpunkt t mindestens eine Koordinate, so daß der Vektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

von dem Parameter $t \in [a, b]$ abhängt, wobei $\mathbf{x}(a)$ der Anfangs- und $\mathbf{x}(b)$ der Endpunkt der Raumkurve ist.

Die durch eine solche vektorielle Funktion $\mathbf{x}(t)$ über dem Intervall $I = [a, b]$ beschriebene Kurve γ heißt zulässige Parameterdarstellung der Klasse r ($r \geq 1$), falls gilt:

- i) $x_i(t) \in C^r(I, \mathbb{R}) \quad i = 1, 2, 3$
- ii) $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0} \quad \forall t \in [a, b]$.

Bei dieser Art von Kurven ist gewährleistet, daß für $i = 1, 2, 3$ jede Funktionskomponente $x_i(t)$ mindestens einmal stetig differenzierbar ist, also der Graph keinen „Knick“ macht und an jeder Stelle der Tangentialvektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ existiert, da nie alle drei Ableitungen $\dot{x}_i(t)$ gleichzeitig verschwinden.

Der Tangentialvektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ wird unter anderem dazu benötigt, die Länge der Kurve γ zu berechnen, denn es gilt:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2 + (\dot{x}_3(t))^2} dt \\ &= \int_a^b ds \quad , \end{aligned}$$

wobei

$$ds = \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2 + (\dot{x}_3(t))^2} dt \iff \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = |\dot{\mathbf{x}}(t)|$$

als das Bogenelement der Raumkurve bezeichnet wird.

2.1.2 Das begleitende Dreibein

Es werde angenommen, daß die Parameterdarstellung $\mathbf{x}(t)$ der Raumkurve γ zulässig von der Klasse $r \geq 2$ sei, das heißt, daß sie mindestens zweimal stetig differenzierbar sei. Die Länge parametrisierter Kurven ändert sich bei Umparametrisierungen nicht [1]. Eine Umparametrisierung nach der Bogenlänge mit Hilfe des Bogenelements ergibt:

$$\mathbf{x}'(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \Rightarrow |\mathbf{x}'(s)| = 1 \quad \forall t \in I \quad .$$

Das bedeutet, daß die nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ihre Bahn mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchläuft.

Man setzt

$$\mathbf{x}'(s) = \mathbf{t}(s)$$

und bezeichnet \mathbf{t} als Tangentenvektor der Raumkurve γ . Dieser ist normiert, denn es gilt:

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1 \quad .$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach der Produktregel ergibt:

$$\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) = 0 \Rightarrow \mathbf{t}'(s) \perp \mathbf{t}(s) \quad .$$

Der normierte Vektor

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|} = \frac{\mathbf{x}''(s)}{|\mathbf{x}''(s)|} \quad \text{für} \quad |\mathbf{x}''(s)| \neq 0$$

heißt Hauptnormalenvektor der Raumkurve γ .

Es gibt noch einen zweiten Vektor, der senkrecht auf den Tangentenvektor steht. Dieser sogenannte Binormalenvektor berechnet sich aus dem vektoriellen Kreuzprodukt des Tangenten- und des Hauptnormalenvektors

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

und hat per definitionem auch die Länge 1.

Diese drei Vektoren bilden an jedem Punkt eine Orthonormalbasis, die sich bei der Bewegung des Punktes längs der Kurve mitbewegt. Deshalb wird diese Orthonormalbasis auch begleitendes Dreiein genannt.

2.1.3 Krümmung, Torsion und Frenet'sche Formel

Das begleitende Dreiein einer Kurve ist nur in den Kurvenpunkten definiert, in denen die Krümmung

$$\kappa(s) = |\mathbf{x}''(s)|$$

nicht verschwindet. Die Krümmung ist ein Maß dafür, wie stark die Kurve von einer Geraden abweicht. Dort wo sie verschwindet, kennzeichnet sie einen geradlinigen Verlauf.

Im allgemeinen liegt die Bahn der Kurve γ nicht in einer Ebene. Ein Maß für die Abweichung vom ebenen Verlauf ist die Windung (auch Torsion genannt):

$$\tau(s) = -\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{b}'(s) \quad .$$

Sie kennzeichnet das Herauswinden der Kurve aus der von \mathbf{t} und \mathbf{n} aufgespannten Ebene.

In jedem Kurvenpunkt lassen sich mit Hilfe des begleitenden Dreieins folgende drei Geraden beziehungsweise Ebenen (siehe Abbildung 2.1) definieren:

Tangente	$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(s) + \lambda \cdot \mathbf{t}(s)$
Hauptnormale	$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(s) + \lambda \cdot \mathbf{n}(s)$
Binormale	$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(s) + \lambda \cdot \mathbf{b}(s)$
Normalebene	$[\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}(s)] \cdot \mathbf{t}(s) = 0$
Streckebene	$[\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}(s)] \cdot \mathbf{n}(s) = 0$
Schmiegebene	$[\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}(s)] \cdot \mathbf{b}(s) = 0 \quad .$

Wenn die Krümmung in einem Punkt $\mathbf{x}(s)$ nicht verschwindet, so wird die Kurve dort von einem Kreis mit mindestens zweiter Ordnung angenähert [2]. Dieser Krümmungskreis mit dem Mittelpunkt

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{x}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \mathbf{n}(s)$$

liegt in der Schmiegebene und der Radius ist gleich dem Kehrwert der Krümmung:

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \quad .$$

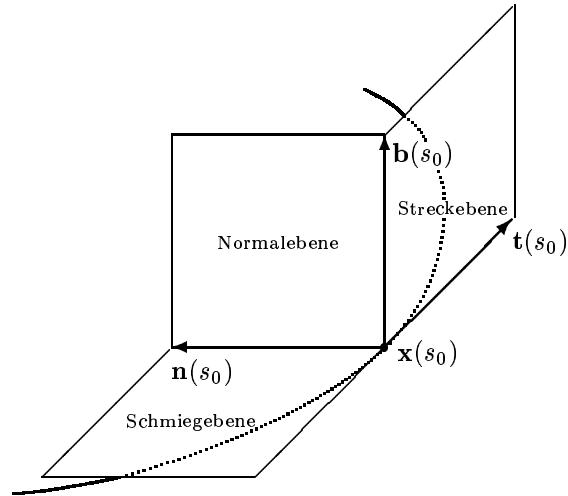


Abbildung 2.1: Das begleitende Dreiein spannt drei Ebenen auf.

Wie sich die Vektoren des begleitenden Dreieins beim Fortschreiten auf der Kurvenbahn ändern, wird mit Hilfe der Krümmung und der Torsion durch die Frenet'schen Formeln ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \tau(s) \cdot \mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= -\tau(s) \cdot \mathbf{n}(s) \end{aligned} .$$

Diese drei Formeln stellen ein System von Differentialgleichungen dar. Nach dem Fundamentalsatz der Kurventheorie ist jede Eigenschaft einer Kurve durch dieses Differentialgleichungssystem festgelegt. Das bedeutet, daß zwei Kurven mit demselben Anfangspunkt und übereinstimmenden Krümmungs- und Torsionsfunktionen gleich sind [4].

Krümmung und Torsion hängen nicht von der Parametrisierung ab und bilden ein unabhängiges und vollständiges Invariantensystem [1].

2.1.4 Interpretation der Krümmung

Die Krümmung $\kappa(s) = |\mathbf{x}''(s)|$ einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve ist ein Indiz, in welchem Maße die Kurve in einem Punkt von einer Geraden abweicht. Um die Definition der Krümmung deuten zu können, betrachte man zwei benachbarte Kurvenpunkte, die dann immer enger zusammenrücken (siehe Abbildung 2.2).

Die Tangentialvektoren $\mathbf{x}'(\tau)$ und $\mathbf{x}'(\sigma)$ an den Kurvenpunkten $\mathbf{x}(\tau)$ und $\mathbf{x}(\sigma)$ haben aufgrund der Parametrisierung nach der Bogenlänge den Betrag 1. Daher gilt für die Differenz dieser beiden Vektoren:

$$\frac{|\mathbf{x}'(\tau) - \mathbf{x}'(\sigma)|}{|\tau - \sigma|} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{|\tau - \sigma|} \approx \frac{\omega}{|\tau - \sigma|} ,$$

für hinreichend kleinen Winkel ω .

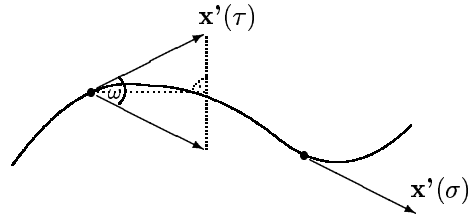


Abbildung 2.2: Deutung der Krümmung.

Darüber hinaus gilt:

$$\mathbf{x}''(\tau) = \lim_{\sigma \rightarrow \tau} \frac{\mathbf{x}'(\tau) - \mathbf{x}'(\sigma)}{\tau - \sigma} \quad ,$$

so daß folgt:

$$\kappa(\tau) = |\mathbf{x}''(\tau)| = \lim_{\sigma \rightarrow \tau} \frac{\omega}{|\tau - \sigma|} \quad .$$

Das bedeutet, daß die Krümmung κ in jedem Punkt eine Winkelgeschwindigkeit ausdrückt, die angibt wie schnell der Gradient seine Richtung ändert. Ändert er seine Richtung nicht, so folgt die Kurve einem geraden Verlauf und die Krümmung verschwindet.

Die obige Definition der Krümmung macht daher nur Sinn, wenn alle Tangentialvektoren der Kurven den konstanten Betrag 1 haben. Aus diesem Grund ist eine eventuelle Umparametrisierung unerlässlich, damit die Kurve mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen wird.

Eine allgemeine Formel zur Bestimmung der Krümmung einer Raumkurve \mathbf{x} mit beliebiger Parametrisierung t kann recht schnell hergeleitet werden. Seien s die Bogenlänge sowie \mathbf{t} , \mathbf{n} und \mathbf{b} das begleitende Dreibein der Kurve \mathbf{x} (vergleiche Abschnitt 2.1.2). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{t}(s) \cdot |\dot{\mathbf{x}}(t)| \\ &= \mathbf{t}(s) \cdot \dot{s}(t) \quad . \end{aligned}$$

Nochmaliges Ableiten ergibt aufgrund der Produktregel:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\mathbf{t}}(s) \cdot \dot{s}(t) + \mathbf{t}(s) \cdot \ddot{s}(t) \\ &= [\mathbf{t}'(s) \cdot \dot{s}(t)] \cdot \dot{s}(t) + \mathbf{t}(s) \cdot \ddot{s}(t) \\ &= \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s) \cdot \dot{s}^2(t) + \mathbf{t}(s) \cdot \ddot{s}(t) \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \kappa(s) \cdot \dot{s}^3(t) \cdot [\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)] \\ &= \kappa(s) \cdot \dot{s}^3(t) \cdot \mathbf{b}(s) \\ \Rightarrow |\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)| &= \kappa(s) \cdot \dot{s}^3(t) \cdot |\mathbf{b}(s)| \\ &= \kappa(s) \cdot \dot{s}^3(t) \\ \Rightarrow \kappa(s) &= \frac{|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)|}{\dot{s}^3(t)} \quad . \end{aligned}$$

Ersetzt man $\dot{s}(t)$ durch $|\dot{\mathbf{x}}(t)|$, dann hängt die Krümmung κ nur noch von t ab:

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)|}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|^3} .$$

2.2 Flächentheorie

2.2.1 Zulässige Parameterdarstellung und Flächenkurven

Ähnlich wie ein Punkt auf einer Raumkurve läßt sich ein Flächenpunkt durch eine vektorielle Funktion

$$\mathbf{X}(u, v) = \begin{pmatrix} x_1(u, v) \\ x_2(u, v) \\ x_3(u, v) \end{pmatrix}$$

darstellen, wobei diese von zwei statt nur von einem Parameter abhängt.

Eine über ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ vektorielle Funktion $\mathbf{X}(u, v)$ heißt zulässige Parameterdarstellung der Klasse r ($r \geq 1$), falls gilt:

- i) $x_i(u, v) \in C^r(G, \mathbb{R}) \quad i = 1, 2, 3$
- ii) $\mathbf{X}_u(u, v) \times \mathbf{X}_v(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in G$.

Das bedeutet, daß wieder jede Funktionskomponente mindestens einmal stetig differenzierbar ist und die ersten partiellen Ableitungen linear unabhängig voneinander sind.

Diese Ableitungsvektoren \mathbf{X}_u und \mathbf{X}_v heißen Tangentialvektoren und spannen die Tangentialebene

$$\mathbf{Y}(\lambda, \mu) = \mathbf{X}(u, v) + \lambda \cdot \mathbf{X}_u(u, v) + \mu \cdot \mathbf{X}_v(u, v)$$

im Flächenpunkt $\mathbf{X}(u, v)$ auf.

Angenommen die zwei Parameter u, v sind differenzierbare Funktionen einer reellen Variablen t , das heißt:

$$u = u(t) \quad \text{und} \quad v = v(t) \quad ,$$

dann beschreibt

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$$

eine Kurve in der Fläche.

Die Tangente dieser Flächenkurve kann dann als Linearkombination der Tangentialvektoren dargestellt werden:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}_u(u, v) \cdot \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v(u, v) \cdot \frac{dv}{dt} = \mathbf{X}_u \cdot \dot{u} + \mathbf{X}_v \cdot \dot{v} \quad .$$

2.2.2 Erste Fundamentalform

Auf einem Flächenstück der Klasse $r \geq 2$ verlaufe die Kurve γ . Das Bogenelement ds dieser Flächenkurve läßt sich dann wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} ds &= |\dot{\mathbf{x}}(t)| \\ &= \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)} \\ &= \sqrt{E \cdot \dot{u}^2 + 2 \cdot F \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + G \cdot \dot{v}^2} \quad , \end{aligned}$$

wobei

$$E = \mathbf{X}_u^2 \quad , \quad F = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v \quad \text{und} \quad G = \mathbf{X}_v^2$$

als erste metrische Fundamentalgrößen bezeichnet werden.

Das Quadrat des Bogenelements $I = ds^2 > 0$ wird erste Fundamentalform genannt und ist nicht nur für die Längen, sondern auch für die Winkelmessungen auf der Fläche maßgebend [4].

Wenn sich zwei Flächenkurven

$$\begin{aligned} \gamma: \quad \mathbf{x}_\gamma(t) &= \mathbf{X}(u(t), v(t)) \\ \rho: \quad \mathbf{x}_\rho(t) &= \mathbf{X}(\mu(t), \nu(t)) \end{aligned}$$

in einem Punkt schneiden, so gilt für den Schnittwinkel α :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\dot{\mathbf{x}}_\gamma \cdot \dot{\mathbf{x}}_\rho}{|\dot{\mathbf{x}}_\gamma| \cdot |\dot{\mathbf{x}}_\rho|} \\ &= \frac{E \cdot \dot{u} \cdot \dot{\mu} + F \cdot (\dot{u} \cdot \dot{\nu} + \dot{v} \cdot \dot{\mu}) + G \cdot \dot{v} \cdot \dot{\nu}}{\sqrt{E \cdot \dot{u}^2 + 2 \cdot F \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + G \cdot \dot{v}^2} \cdot \sqrt{E \cdot \dot{\mu}^2 + 2 \cdot F \cdot \dot{\mu} \cdot \dot{\nu} + G \cdot \dot{\nu}^2}} \quad . \end{aligned}$$

Die metrischen Fundamentalgrößen sind auch für die Berechnung von Flächeninhalten von Bedeutung. Bei einer zulässigen Parametrisierung einer Fläche sind die Vektoren \mathbf{X}_u und \mathbf{X}_v linear unabhängig und spannen ein Parallelogramm auf, dessen Flächeninhalt gleich dem Betrag ihres vektoriellen Kreuzproduktes $\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v$ ist. Der Ausdruck

$$dF = |\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v| \, du \, dv$$

wird Flächenelement genannt, und der Inhalt A einer gekrümmten Fläche wird durch Integration über den Parameterbereich W errechnet:

$$A = \int_W dF = \int_W \sqrt{E \cdot G - F^2} \, du \, dv \quad ,$$

wobei $E \cdot G - F^2 > 0$ wegen der zulässigen Parametrisierung überall gewährleistet ist.

Da die metrischen Fundamentalgrößen E, F und G Funktionen von u und v sind, ändern sich diese Größen bei einer Umparametrisierung. Die erste Fundamentalform I ändert sich jedoch dabei nicht, sondern bleibt invariant [3].

Wie bei einer Raumkurve gibt es auch bei einer zulässigen Flächendarstellung ein begleitendes Dreibein, welches von den Vektoren $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$ und dem normierten Flächennormalenvektor

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|}$$

aufgespannt wird.

Per definitionem steht \mathfrak{N} sowohl senkrecht auf \mathbf{X}_u als auch auf \mathbf{X}_v . Jedoch schließen im allgemeinen \mathbf{X}_u und \mathbf{X}_v keinen rechten Winkel ein. Bei einer Umparametrisierung kann dieser Normalenvektor höchstens das Vorzeichen ändern, während sich \mathbf{X}_u und \mathbf{X}_v fast beliebig in der Tangentialebene bewegen können.

2.2.3 Die zweite Fundamentalform

Um das Verhalten einer Fläche in der Umgebung eines Flächenpunktes zu untersuchen, ist die Abweichung der Fläche von der Tangentialebene des Punktes von besonderem Interesse. Sei die Flächenkurve γ nach ihrer Bogenlänge parametrisiert, das heißt:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{X}(u(s), v(s)) \quad .$$

Dann ist das Maß ihrer Krümmung wieder durch die zweite Ableitung

$$\kappa(s) = |\mathbf{x}''(s)|$$

gegeben, und nach den Frenet'schen Formeln gilt:

$$\mathbf{x}''(s) = \mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s) \quad ,$$

wobei \mathbf{n} der Normalenvektor der Kurve ist.

Andererseits läßt sich $\mathbf{x}''(s)$ auch bezüglich des begleitenden Dreieins der Fläche mit Hilfe eines Vektors \mathbf{T} aus der Tangentialebene darstellen:

$$\mathbf{x}''(s) = \kappa_n(s) \cdot \mathfrak{N} + \kappa_g(s) \cdot \mathbf{T} \quad ,$$

wobei κ_n Normalkrümmung und κ_g geodätische Krümmung der Flächenkurve genannt werden.

Die Normalkrümmung ist der Anteil der Gesamtkrümmung in Richtung der Flächennormalen, und die geodätische Krümmung ist die orthogonale Projektion auf den Vektor \mathbf{T} in der Tangentialebene, wobei \mathbf{T} sowohl senkrecht auf \mathfrak{N} als auch auf den Tangentialvektor \mathbf{t} der Flächenkurve steht [2]:

$$\mathbf{T} = \mathfrak{N} \times \mathbf{t} \quad .$$

Aufgrund der Orthogonalität und Normierung von \mathbf{T} und \mathfrak{N} gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 \quad .$$

Daher ist es einfach, die geodätische Krümmung zu berechnen, wenn man die Gesamt- und Normalkrümmung kennt. Insbesondere verschwindet die geodätische Krümmung genau dann, wenn die Flächenkurve eine Geodäte ist, also wenn gilt:

$$\mathbf{x}''(s) \parallel \mathfrak{N} \quad .$$

Geodäten sind die Verbindungen kürzester Länge zwischen zwei Flächenpunkten.

Die Orthogonalität der Vektoren \mathfrak{N} und \mathbf{T} zueinander kann man sich zu Nutzen machen, um die Normalkrümmung auszurechnen, indem man obige Gleichung mit \mathfrak{N} multipliziert:

$$\kappa_n(s) = \mathbf{x}''(s) \cdot \mathfrak{N} \quad .$$

Wenn eine Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist, dann stimmt die Normalkrümmung mit der sogenannten zweiten Fundamentalform II überein:

$$\begin{aligned} II &= \mathbf{x}''(s) \cdot \mathfrak{N} \\ &= L \cdot \dot{u}^2 + 2 \cdot M \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + N \cdot \dot{v}^2, \end{aligned}$$

wobei

$$L = \mathbf{X}_{uu} \cdot \mathfrak{N}, \quad M = \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathfrak{N} \quad \text{und} \quad N = \mathbf{X}_{vv} \cdot \mathfrak{N}$$

als die zweiten Fundamentalgrößen bezeichnet werden.

Genauso wie die erste ist auch die zweite Fundamentalform invariant bezüglich Parametertransformationen, obgleich sich die zweiten Fundamentalgrößen L, M und N dabei verändern.

Für Kurven mit beliebiger Parameterdarstellung läßt sich die Normalkrümmung als Quotient der zweiten und ersten Fundamentalform

$$\kappa_n(t) = \frac{II}{I}$$

darstellen [4] und ist somit auch (fast) invariant. Lediglich das Vorzeichen kann sich aufgrund des Vektors \mathfrak{N} ändern.

2.2.4 Mittlere und Gauß'sche Krümmung

Bewegt man sich auf einer Flächenkurve von einem Flächenpunkt weg, so ist die Abweichung

$$d = \frac{1}{2} \cdot II$$

zu dessen Tangentialebene bis auf den Vorfaktor $\frac{1}{2}$ durch die zweite Fundamentalform beschrieben [3].

Durch einen Flächenpunkt können beliebig viele Flächenkurven verlaufen. Damit ist eine unendliche Schar von Tangenten gegeben, in deren Richtungen die Abweichungen von der Tangentialebene und damit die Normalenkrümmungen variieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\dot{v} \neq 0$, dann ist jede dieser Tangenten durch das Verhältnis

$$\lambda = \frac{\dot{u}}{\dot{v}}$$

bestimmt, so daß die entsprechenden Normalenkrümmungen in einem Flächenpunkt abhängig von diesem Parameter geschrieben werden können:

$$\kappa_n(\lambda) = \frac{II}{I} = \frac{L \cdot \lambda^2 + 2 \cdot M \cdot \lambda + N}{E \cdot \lambda^2 + 2 \cdot F \cdot \lambda + G}.$$

Leitet man diese Funktion mit Hilfe der Quotientenregel nach λ ab, so erhält man im Zähler wieder eine Polynom zweiten Grades und das Verhältnis λ variiert in einem kompakten Intervall. Daher muß es für jeden Flächenpunkt eine maximale Krümmung κ_1 und eine minimale Krümmung κ_2 geben. Diese Extremwerte nennt man Hauptkrümmungen, und die zugehörigen Richtungen heißen Hauptkrümmungsrichtungen.

Im allgemeinen interessieren aber weniger κ_1 und κ_2 , sondern eher ihr arithmetisches Mittel und ihr Produkt [4].

Man bezeichnet

$$H = \frac{1}{2} \cdot (\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{E \cdot N + G \cdot L - 2 \cdot F \cdot M}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)}$$

als mittlere und

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{L \cdot N - M^2}{E \cdot G - F^2}$$

als Gauß'sche Krümmung.

Da sich aufgrund einer Umparametrisierung der Fläche bei der Normalkrümmung κ_n höchstens das Vorzeichen ändert, bleiben die Extremwerte von κ_n weiterhin Extremwerte. Bei ihnen können sich lediglich auch die Vorzeichen ändern, so daß Maximum und Minimum vertauscht werden. Daher ist die Gauß'sche Krümmung eine invariante Eigenschaft der Fläche, die insbesondere von deren Darstellung unabhängig ist. Wegen $E \cdot G - F^2 > 0$ stimmt das Vorzeichen von K mit dem von $L \cdot N - M^2$ überein, so daß sich drei Fälle unterscheiden lassen:

Ein Flächenpunkt heißt

- elliptischer Punkt, falls $K > 0$
- parabolischer Punkt, falls $K = 0$
- hyperbolischer Punkt, falls $K < 0$.

Diese Bezeichnungen lassen sich leicht geometrisch interpretieren (siehe Abbildung 2.3). In der Umgebung eines elliptischen Punktes haben die Hauptkrümmungen gleiches Vorzeichen und die Fläche ähnelt dort einem elliptischen Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2 \cdot c \cdot z = 0 \quad a, b, c \neq 0 \quad .$$

Für parabolische Punkte ist eine Hauptkrümmung gleich null und die Fläche sieht dort wie eine parabolische Zylinderfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + 2 \cdot b \cdot z = 0 \quad a, b, c \neq 0$$

aus. In hyperbolischen Punkten haben die Hauptkrümmungen unterschiedliches Vorzeichen, so daß die Fläche lokal die Form eines hyperbolischen Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2 \cdot c \cdot z = 0 \quad a, b, c \neq 0 \quad .$$

hat. Flächenpunkte mit $\kappa_1 = \kappa_2$ werden Nabelpunkte genannt.

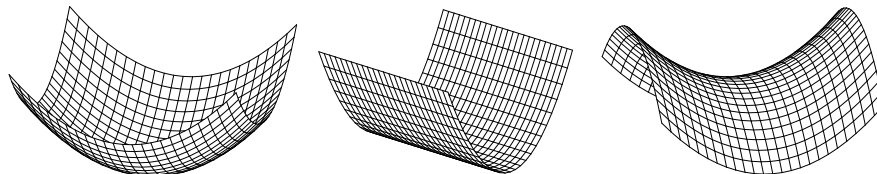


Abbildung 2.3: Elliptisches Paraboloid, parabolische Zylinderfläche und hyperbolisches Paraboloid.

2.2.5 Gleichungen von Gauß-Weingarten

In der Flächentheorie gibt es ein Analogon zu den Frenet'schen Gleichungen der Kurventheorie. Diese drücken die Ableitungen \mathbf{t}' , \mathbf{n}' und \mathbf{b}' als Linearkombination von \mathbf{t} , \mathbf{n} und \mathbf{b} mit den Koeffizienten κ und τ aus. In ähnlicher Weise können die Ableitungen des begleitenden Dreieins der Fläche \mathbf{X}_u , \mathbf{X}_v und \mathfrak{N} als Linearkombination dieser Vektoren dargestellt werden, wobei die Koeffizienten Funktionen der ersten metrischen und zweiten Fundamentalgrößen sind.

Auf einer Fläche der Klasse $r \geq 2$ besitzen die linear unabhängigen Vektoren \mathbf{X}_u , \mathbf{X}_v , \mathfrak{N} stetige Ableitungen \mathbf{X}_{uu} , \mathbf{X}_{uv} , \mathbf{X}_{vv} , \mathfrak{N}_u , \mathfrak{N}_v und es gilt [3]:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \cdot \mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^2 \cdot \mathbf{X}_v + L \cdot \mathfrak{N} \\ \mathbf{X}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \cdot \mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^2 \cdot \mathbf{X}_v + M \cdot \mathfrak{N} \\ \mathbf{X}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \cdot \mathbf{X}_u + \Gamma_{22}^2 \cdot \mathbf{X}_v + N \cdot \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N}_u &= \beta_1^1 \cdot \mathbf{X}_u + \beta_1^2 \cdot \mathbf{X}_v \\ \mathfrak{N}_v &= \beta_2^1 \cdot \mathbf{X}_u + \beta_2^2 \cdot \mathbf{X}_v \quad ,\end{aligned}$$

wobei die sogenannten Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k und die Koeffizienten β_l^m gegeben sind durch:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{G \cdot E_u - 2 \cdot F \cdot F_u + F \cdot E_v}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} & \Gamma_{12}^1 &= \frac{G \cdot E_v - F \cdot G_u}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2 \cdot G \cdot F_v - G \cdot G_u - F \cdot G_v}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2 \cdot E \cdot F_u - E \cdot E_v + F \cdot E_u}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{E \cdot G_u - F \cdot E_v}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{E \cdot G_v - 2 \cdot F \cdot F_v + F \cdot G_u}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} \\ \beta_1^1 &= \frac{M \cdot F - L \cdot G}{E \cdot G - F^2} & \beta_1^2 &= \frac{L \cdot F - M \cdot E}{E \cdot G - F^2} & \beta_2^1 &= \frac{N \cdot F - M \cdot G}{E \cdot G - F^2} & \beta_2^2 &= \frac{M \cdot F - N \cdot E}{E \cdot G - F^2} \quad .\end{aligned}$$

Wie in der Kurventheorie gibt es in der Flächentheorie auch einen Fundamentalsatz: Es seien die ersten metrischen Fundamentalgrößen E, F, G zweimal und die zweiten Fundamentalgrößen L, M, N einmal stetig differenzierbar.

Wenn alle diese Funktionen – unabhängig von u und v – die Gleichungen von Mainardi-Codazzi

$$\begin{aligned}L_v - M_u &= L \cdot \Gamma_{12}^1 + M \cdot (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N \cdot \Gamma_{11}^2 \\ M_v - N_u &= L \cdot \Gamma_{22}^1 + M \cdot (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N \cdot \Gamma_{12}^2\end{aligned}$$

erfüllen und falls gilt:

$$\begin{aligned}L \cdot N - M^2 &= F \cdot [(\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2] \\ &+ E \cdot [(\Gamma_{11}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1] \quad ,\end{aligned}$$

dann gibt es ein Flächenstück der Klasse $r \geq 3$, das lokal definiert ist und bis auf die Lage im Raum eindeutig ist [3].

Die letzte der obigen Gleichungen ist von besonderem Interesse, denn danach hängt $L \cdot N - M$ nur noch von E, F, G und deren Ableitungen ab.

Daher gilt das sogenannte Theorema Egregium von Gauß: Die Gauß'sche Krümmung auf einer Fläche der Klasse $r \geq 3$ ist eine Funktion der ersten metrischen Fundamentalgrößen und deren Ableitungen allein.

Literatur zu Kapitel 2

- [1] Bär Christian. *Elementare Differentialgeometrie*. Walter de Gruyter Verlag, Berlin 2000.
- [2] Klotzek Bernd. *Einführung in die Differentialgeometrie*. Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main 1995.
- [3] Lipschutz Martin. *Differentialgeometrie*. McGraw-Hill Book Company GmbH, Düsseldorf 1980.
- [4] Schöne Wolfgang. *Differentialgeometrie*. Harri Deutsch Verlag, Thun 1978.

Kapitel 3

Das Moiré-Phänomen

Obwohl der Moiré-Effekt schon seit Tausenden von Jahren bekannt ist, gibt es vergleichsweise wenig Literatur über diese Erscheinung. Dieses Kapitel beinhaltet ein mathematisches Modell, das das Zustandekommen von Moirémustern in leicht nachvollziehbarer Weise detailliert beschreibt. Darüber hinaus soll dem Leser auch verständlich gemacht werden, warum in der Literatur der Moiré-Effekt oft als mechanische Interferenz bezeichnet wird. Zu guter Letzt wird ebenfalls mathematisch sehr genau auf das Schatten-Moiré-Verfahren eingegangen, welches unter anderem zur Diagnose von Skoliosen Verwendung findet.

3.1 Wer war Moiré?

Viele mathematische Begriffe wie die Fourier-Transformation, der Laplace-Operator oder die Lagrange-Optimierung verdanken ihre Namen französischen Mathematikern und Naturwissenschaftlern. Also liegt die Vermutung nahe, daß auch bei den Ausdrücken Moiré-Effekt, Moiré-Technik oder Moiré-Topographie ein Franzose bei der Namensgebung Pate stand.

Diese Vermutung ist jedoch falsch, Moiré ist keine Person. Das französische Adjektiv „moiré“ wird ins Deutsche gerne als „gewässert“ beziehungsweise „geflammt“ übersetzt und bezeichnet ein wellenähnliches Muster auf Metalloberflächen oder auch in Textilien und hat seine Wurzeln im arabischen Wort „Mohair“, die Bezeichnung für eine langhaarrige, nur wenig gewellte Glanzwollart der Angoraziege.

Der Moiré-Effekt entsteht, wenn sich zwei ähnliche, regelmäßige Muster leicht versetzt beziehungsweise leicht geneigt zueinander überlagern, was ein neues, wellenartiges Muster zur Folge hat.

Französische Weber nutzten diese Erscheinung um Webfehler sichtbar zu machen, indem sie einfach zwei Stofflaken übereinander legten und gegen das Licht hielten. Vermutlich war diese Methode schon den alten chinesischen Seidenwebern bekannt.

Kleine Unregelmäßigkeiten in der einen Lake werden durch das regelmäßige Muster der anderen Lake visuell verstärkt, so daß man die Fehler mit dem bloßen Auge erkennen kann.

Im Alltag kann man den Moiré-Effekt unter anderem bei sich überlappenden, engmaschigen Gardinenfalten beobachten. Das gewellte Muster ist leicht zu erkennen, wenn man durch diese Falte aus dem Fenster schaut.

Die erste wissenschaftliche Abhandlung dieser Erscheinung wird Lord Rayleigh (1842–1919) im Jahre 1874 zugeschrieben [7]. Das mathematische Modell zeigt sehr viele Parallelen zur Wellenüberlagerung in der Optik – kurz: zur Interferenz – auf.

3.2 Interferenz

Interferenz ist ein Phänomen, das bei der Überlagerung zweier oder mehrerer Wellen an einem Raumpunkt auftritt. Interferenzen lassen sich bei Schallwellen, Wasserwellen und natürlich auch bei elektromagnetischen Wellen beobachten. Insbesondere bei Licht zeigt sich dabei die Variation der Intensitätsverteilung in Form von außerordentlich hellen und dunklen Streifen.

Damit solche „Interferenzmuster“ bei Licht wahrgenommen werden können, müssen die wechselwirkenden Wellen kohärent zueinander sein. Kohärenz bedeutet, daß die Phasendifferenz der Wellen während der Beobachtungszeit konstant bleibt. Liegt keine feste Phasenbeziehung vor, dann spricht man von inkohärenten Wellen.

Meist wird in der Praxis mit Hilfe eines Lasers monochromatisches Licht mit gleichbleibender Frequenz und Wellenlänge verwandt, um Interferenzen zu erzeugen. Gewöhnliches Licht einer Lampe oder von der Sonne ist in der Regel inkohärent. Jedoch können Teilwellen einer inkohärenten Quelle trotzdem interferieren, wenn die Lichtquelle begrenzt oder der Winkel zwischen den betreffenden Lichtstrahlen hinreichend verkleinert wird [4].

3.2.1 Intensität einer elektromagnetischen Welle

Eine elektromagnetische Welle besteht sowohl aus einer magnetischen als auch aus einer zu ihr senkrecht stehenden elektrischen Welle. Beide Wellen transportieren Energie, deren Träger der Raum ist, so daß die gesamte Energie gleich die Summe der elektrischen und der magnetischen Energiedichte ist, das heißt:

$$\rho = \rho_{el} + \rho_{mag} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} \quad .$$

Wegen

$$E = B \cdot c$$

mit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 299\,792,458 \left[\frac{km}{s} \right]$$

folgt:

$$\rho_{el} = \rho_{mag} \quad \Rightarrow \quad \rho = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E^2 = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot B^2 \quad .$$

Dabei sind

$$\varepsilon_o = 8,85418782 \cdot 10^{-12} [AsV^{-1}m^{-1}]$$

die elektrische Feldkonstante sowie

$$\mu_o = 1,2566 \cdot 10^{-6} [VsA^{-1}m^{-1}]$$

die magnetische Feldkonstante.

Die Energie, die pro Zeiteinheit eine Fläche senkrecht durchsetzt, nennt man Intensität. Sie läßt sich als Produkt der Energiedichte ρ und der Ausbreitungsgeschwindigkeit c schreiben [3]:

$$\mathfrak{I} = \rho \cdot c \quad .$$

Die Intensität ist permanent am Schwanken, da sich die elektrische Feldstärke E beziehungsweise die magnetische Flußdichte B an jeder Stelle des Raumes \vec{x}_0 wie jede harmonische Welle zeitlich ändert, denn:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \cdot \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}_0) \quad \text{beziehungsweise} \\ B(t) &= B_0 \cdot \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}_0) \quad , \end{aligned}$$

dabei sind $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Kreisfrequenz und \vec{k} der Wellenzahlvektor, der in die Ausbreitungsrichtung zeigt und die Länge $\frac{2\pi}{\lambda}$ hat.

In der Praxis ist der Mittelwert $\overline{\mathfrak{I}}$ der Intensität \mathfrak{I} von Bedeutung und beträgt:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{I}} &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E_0^2 \cdot c \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{B_0^2}{\mu_0 \mu_r} \cdot c \quad , \end{aligned}$$

denn für die Schwingungsdauer T der Sinuswelle gilt:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - kx_0) dt = \frac{1}{2} \quad .$$

Die mittlere Intensität $\overline{\mathfrak{I}}$ ist also zur Amplitude des E - beziehungsweise B -Feldes proportional.

Um die Vorfaktoren ignorieren zu können, setzt man im allgemeinen die abgewandelte Intensität I , auch Flußdichte genannt, gleich dem Quadrat der Amplitude A :

$$I = A^2 \quad .$$

3.2.2 Überlagerung von Wellen

Seien zwei Wellen W_1 und W_2 der gleichen Wellenlänge und damit auch der gleichen Frequenz in der komplexen Schreibweise gegeben:

$$W_1(x, t) = A_1 \cdot e^{i(\omega t - kx + \phi_1)} \quad \text{und} \quad W_2(x, t) = A_2 \cdot e^{i(\omega t - kx + \phi_2)} \quad ,$$

mit den Amplituden A_1 beziehungsweise A_2 und den Anfangsphasen ϕ_1 respektive ϕ_2 .

Wenn sich diese beiden Wellen überlagern, resultiert durch einfache Addition von W_1 und W_2 eine Welle W :

$$W(x, t) = A_1 \cdot e^{i(\omega t - kx + \phi_1)} + A_2 \cdot e^{i(\omega t - kx + \phi_2)} \quad .$$

Das Quadrat der Amplitude A dieser Welle läßt sich mit Hilfe des komplex Konjugierten berechnen:

$$\begin{aligned} A^2 &= W(x, t) \cdot W^*(x, t) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 \cdot A_2 \cdot \left[e^{i(\phi_1 - \phi_2)} + e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} \right] \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\phi) \quad , \end{aligned}$$

wobei $\phi = \phi_1 - \phi_2$.

Daher gilt für die Intensität I :

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\phi) \quad .$$

Den letzten Summanden

$$2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\phi)$$

nennt man Interferenzterm. Er deutet an, daß die Intensität der Welle W nur von der Phasendifferenz ϕ abhängt und zwischen

$$\begin{aligned} I_{max} &= I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \quad \text{für} \quad \phi = 2l\pi; \quad l \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \\ I_{min} &= I_1 + I_2 - 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \quad \text{für} \quad \phi = (2l + 1)\pi; \quad l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

liegt.

Bei Interferenzen von monochromatischem Licht – zum Beispiel durch Beugung an einem Doppelspalt – können aufgrund variierender optischer Weglängen dunkle und helle Streifen in der Bildebene beobachtet werden. Diese Sichtbarkeit („Visibility“) der verschiedenen Intensitäten wird durch das Verhältnis

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

mathematisch ausgedrückt [9].

Dieser Kontrast V beträgt für den Fall, daß die ursprünglichen Intensitäten I_1 und I_2 gleich sind, maximal 1. Denn in diesem Fall löschen sich die beiden Wellen an einer Stelle gegenseitig vollständig aus, und an einer anderen Stelle verstärken sie sich auf das Vierfache der Intensität der einzelnen Welle, das heißt

$$I_{min} = 0 \quad \text{und} \quad I_{max} = 4 \cdot I_1 = 4 \cdot I_2 \quad \Rightarrow \quad V = 1 \quad .$$

3.2.3 Interferenz zwischen ebenen Wellen

Man spricht von einer ebenen Welle, wenn ihre Wellenfronten einen Satz von Ebenen bilden, die senkrecht auf dem Wellenvektor \vec{k} stehen. Dieser Wellenvektor zeigt in die Ausbreitungsrichtung und hat als Betrag die Wellenzahl k . Solche Wellen können zum einen mit Hilfe von Linsensystemen erzeugt werden, zum anderen sind sie auch eine sehr gute Näherung von sphärischen Wellen in großer Entfernung zu deren Punktquelle, da mit wachsendem Radius die Krümmung abnimmt.

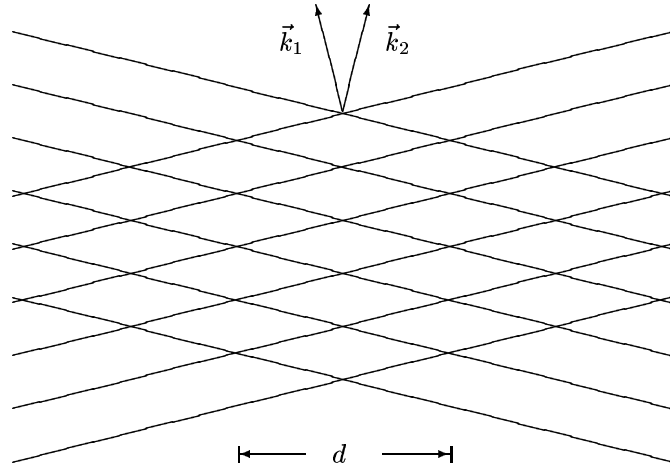
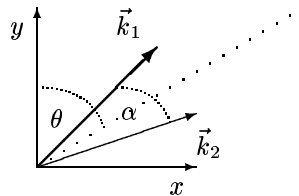


Abbildung 3.1: Überlagerung zweier ebenen Wellen.

Abbildung 3.1 zeigt zwei monochromatische, planare Wellen W_1 und W_2 , die sich in Richtung \vec{k}_1 beziehungsweise \vec{k}_2 ausbreiten.

Die durchschnittliche Intensität an jeder Stelle wird mit Hilfe eines Koordinatenkreuzes berechnet. Dieses Kreuz mit den Koordinaten x und y liegt in der von \vec{k}_1 und \vec{k}_2 aufgespannten Ebene. Der Ursprung ist so gewählt, daß dort die Phasen beider Wellen zum Beobachtungszeitpunkt gleich Null betragen (siehe Abbildung 3.2).


 Abbildung 3.2: Koordinatenkreuz mit den beiden Richtungsvektoren \vec{k}_1 und \vec{k}_2 .

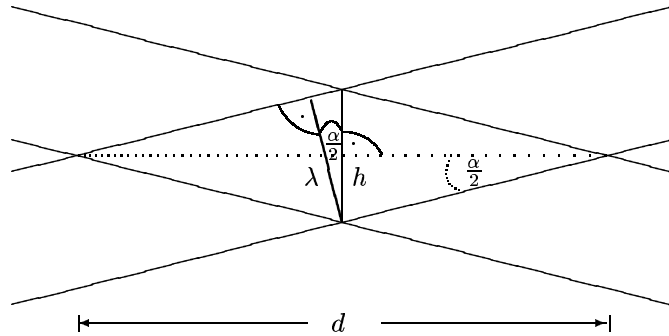
Da die Länge der Wellenvektoren gleich der Wellenzahl k ist, gilt:

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} k \cdot \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \\ k \cdot \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} k \cdot \sin\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right) \\ k \cdot \cos\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix},$$

wobei α der Winkel zwischen \vec{k}_1 und \vec{k}_2 ist. Der Winkel θ wird von der Winkelhalbierenden der Wellenvektoren und der y -Achse eingeschlossen.

Daher lassen sich die beiden Wellen W_1 , W_2 mit zeitunabhängiger Phase schreiben als

$$\begin{aligned} W_1(x, y) &= A_1 \cdot e^{ik[x \sin(\theta - \frac{\alpha}{2}) + y \cos(\theta - \frac{\alpha}{2})]} \quad \text{und} \\ W_2(x, y) &= A_2 \cdot e^{ik[x \sin(\theta + \frac{\alpha}{2}) + y \cos(\theta + \frac{\alpha}{2})]}. \end{aligned}$$


 Abbildung 3.3: Der Einfluß von λ und α auf d .

Mit Hilfe der Euler'schen Additionstheoreme läßt sich die Phasendifferenz ϕ in einem geschlossenen Ausdruck darstellen:

$$\begin{aligned}\phi &= k \left[x \sin \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) + y \cos \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) \right] - k \left[x \sin \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right) + y \cos \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right) \right] \\ &= 2k \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cdot [-x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)] \quad .\end{aligned}$$

Der horizontale Abstand d zwischen den „Schnittstellen“ der parallelen Ebenen (siehe Abbildung 3.1) hängt von der Wellenlänge λ und dem Winkel α ab:

$$d = \frac{\lambda}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \quad .$$

Denn nach Abbildung 3.3 gilt:

$$\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{2h}{d} \quad \text{und} \quad \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\lambda}{2h} \quad .$$

Das bedeutet aber auch, daß der Abstand d größer wird, wenn der Winkel kleiner wird und umgekehrt.

Natürlich sind bei Interferenzen von ebenen Wellen die Intensitätsverteilungen an jeder Stelle der x - y -Ebene ebenfalls von dem Interferenzterm

$$2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\phi) = 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos \left(\frac{4\pi}{d} \cdot [-x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)] \right)$$

abhängig, der an dieser Stelle ein wenig kompliziert aussieht.

3.3 Der Moiré-Effekt

Die gemeinsame Ursache aller Moiréerscheinungen ist die Überlagerung von mindestens zweier Rasterstrukturen. Die einfachsten Raster sind regelmäßige Gitter, bestehend aus parallelen geraden Linien mit gleichbleibendem Abstand b . Werden zwei solcher feinen Gitter – in einem kleinen Winkel α geneigt zueinander – überlagert, so entstehen sowohl helle, als auch dunkle sogenannter Moiréstreifen (siehe Abbildung 3.4).

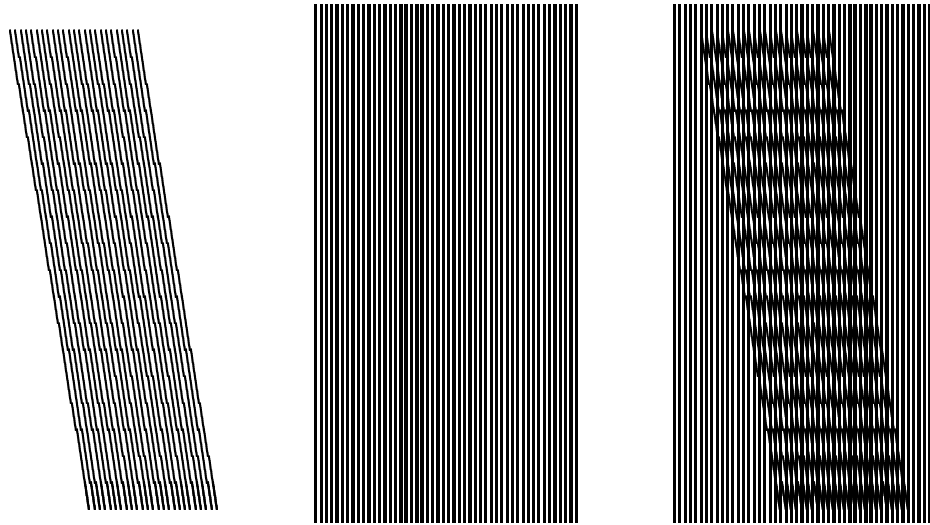


Abbildung 3.4: Überlagerung zweier regelmäßiger Gitter.

Von weitem betrachtet werden die einzelnen Linien der erzeugenden Gitter nicht mehr scharf vom Auge wahrgenommen. Aufgrund dieser optischen Täuschung erkennt der Betrachter nur sich abwechselnde helle und dunkle Streifen.

Aus Abbildung 3.3 ist leicht ersichtlich, daß diese Moiréstreifen senkrecht zur Winkelhalbierenden des Neigungswinkels α stehen und die Streifen breiter werden, wenn α kleiner wird, denn es gilt:

$$d = \frac{b}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad .$$

Zur besseren mathematischen Handhabung der Moirémuster werden die diskreten Gitterstrukturen durch sinusförmige Funktionen approximiert. Die Überlagerung der Gitter weist daher mathematische Parallelen zur Überlagerung von (elektromagnetischen) Wellen auf. Oft wird der Moiré-Effekt als mechanische Interferenz bezeichnet [2].

3.3.1 Darstellung der Gitter als Fourier-Reihen

Regelmäßige Gitter, bestehend aus parallelen Linien der Breite a und dem Abstand b , können in einem dreidimensionalen Koordinatenkreuz durch eine gerade, periodische Funktion g beschrieben werden (vergleiche Abbildung 3.5):

$$g(u, v) = \begin{cases} G & \text{für } -\frac{a}{2} \leq u \leq \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad v \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ,$$

mit der Periode $P = a + b$ und dem „Grauwert“ G .

Da die Funktion g symmetrisch zur z -Achse ist, besteht ihre approximierende Fourier-Reihe

$$S_g(u, v) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(\omega n u)$$

nur aus Kosinustermen mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{P}$ und einer Konstanten a_0 .

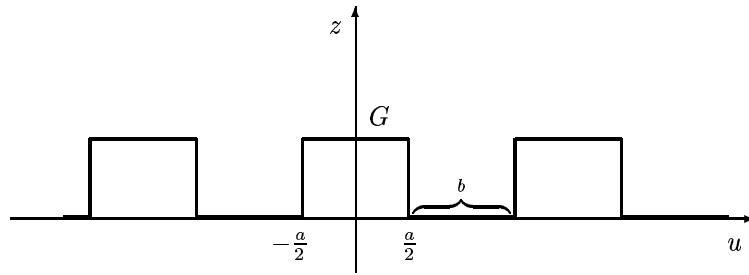


Abbildung 3.5: Seitenansicht des Gitters.

Die Fourierkoeffizienten lassen sich wie folgt berechnen:

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} g(u, v) \, du = \frac{1}{P} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} G \, du = \frac{a}{P} \cdot G$$

und

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} g(u, v) \cdot \cos(\omega n u) \, du = \frac{2G}{P} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos(\omega n u) \, du = \frac{2G}{n\pi} \sin\left(n\omega \frac{a}{2}\right) \quad n \geq 1.$$

Da die Funktion g unstetig ist, weist ihre Fourier-Reihe natürlich das Gibbs-Phänomen auf und schwingt an den Sprungstellen insgesamt um etwa 18% über. An diesen Stellen nimmt diese Reihe den Wert $\frac{G}{2}$ an, was jedoch bezüglich der optischen Täuschung irrelevant ist, da sie ansonsten gleichmäßig auf kompakten Teilstücken gegen g konvergiert.

Die Gitterfunktion g ist ein Spezialfall, bei dem die Gitterlinien parallel zur einen und senkrecht zur anderen Koordinatenachse verlaufen. Jedoch ist es sinnvoll erst diesen Fall zu betrachten, um dann die Fourier-Reihe eines Gitters zu bestimmen, das mit beliebiger Orientierung in einer x - y -Ebene liegt.

Dazu werden die u - v -Koordinaten abhängig von einem Drehwinkel $\theta \neq 0$ als x - y -Koordinaten dargestellt (siehe Abbildung 3.6).

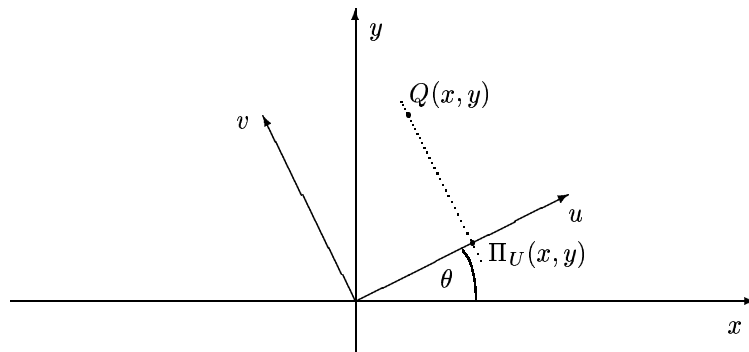


Abbildung 3.6: Koordinatentransformation durch Drehung.

Zwischen den Einheitsvektoren \vec{e}_u , \vec{e}_v , \vec{e}_x und \vec{e}_y der entsprechenden Achsen bestehen folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}\vec{e}_u &= \cos(\theta) \cdot \vec{e}_x + \sin(\theta) \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_v &= -\sin(\theta) \cdot \vec{e}_x + \cos(\theta) \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_x &= \cos(\theta) \cdot \vec{e}_u - \sin(\theta) \cdot \vec{e}_v \\ \vec{e}_y &= \sin(\theta) \cdot \vec{e}_u + \cos(\theta) \cdot \vec{e}_v\end{aligned}$$

Sei U der von \vec{e}_u aufgespannte Vektorraum, $Q(x, y)$ irgendein Punkt in der Ebene und Π_U die orthogonale Projektion von $Q(x, y)$ auf U .

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\Pi_U(x, y) &= \langle (x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_u \rangle \cdot \vec{e}_u \\ &= \langle (x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) \cdot (\cos(\theta) \cdot \vec{e}_x + \sin(\theta) \cdot \vec{e}_y) \rangle \cdot \vec{e}_u \\ &= (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)) \cdot \vec{e}_u \quad ,\end{aligned}$$

da \vec{e}_x und \vec{e}_y orthonormal sind.

Daher läßt sich das „gedrehte“ Gitter mit folgender Fourier-Reihe darstellen:

$$S_g(x, y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(\omega n \cdot [x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)]) \quad .$$

Die Fourierkoeffizienten a_n ändern sich natürlich nicht, da sie nur eine Gewichtung der einzelnen Elementarschwingungen sind, die sich bei der Drehung nur in eine andere Richtung ausbreiten.

Die geraden Gitterlinien kann man natürlich auch als parallele Geraden in der x - y -Ebene darstellen. Die eckige Klammer bei der obigen Fourier-Reihe entspricht der orthogonalen Projektion eines Punktes $Q(x, y)$ auf den Vektorraum U .

Alle Punkte, die auf der „Basisgitterlinie“ liegen werden auf den Ursprung projiziert, genügen also der Gleichung

$$x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\cot(\theta) \cdot x \quad .$$

Da die Gitterlinien den Abstand P zueinander haben, muß der Term in der eckigen Klammer immer ganzzahlige Vielfache von der Periode P annehmen.

Daher genügt jeder Punkt $Q(x, y)$, der auf der Gitterlinie k -ter Ordnung ($k \in \mathbb{Z}$) liegt, der Gleichung

$$x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) = kP \quad \Rightarrow \quad y = -\cot(\theta) \cdot x + \frac{kP}{\sin(\theta)} \quad .$$

Die parallelen Geraden mit der Steigung $-\cot(\theta)$ unterscheiden sich also logischerweise nur durch die y -Koordinatenabschnitte

$$\frac{kP}{\sin(\theta)} \quad .$$

3.3.2 Darstellung von Gittern beliebiger Struktur

Gitter müssen nicht unbedingt aus geraden Linien bestehen, sondern können zum Beispiel auch ein wellenartiges Muster aufweisen. Solch eine wellenartige Gitterlinie läßt sich im u - v -Koordinatenkreuz einfach mit Hilfe der Sinusfunktion darstellen:

$$u(v) = A \cdot \sin(\Omega v) \quad ,$$

mit der Amplitude A und der Kreisfrequenz Ω .

Dieses Gitter mit der Linienbreite a wird auch wieder durch eine periodische Funktion g beschrieben:

$$g(u, v) = \begin{cases} G & \text{für } -\frac{a}{2} \leq u - A \cdot \sin(\Omega v) \leq \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad v \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Obige Funktion g ist gerade, da die Symmetrieachse z für jedes $v \in \mathbb{R}$ um den Wert $A \cdot \sin(\Omega v)$ in Richtung \vec{e}_u verschoben wird. Die dazugehörige Fourier-Reihe hat dann folgende Gestalt:

$$S_g(u, v) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos[\omega n \cdot (u - A \cdot \sin(\Omega v))] \quad .$$

Die Fourierkoeffizienten a_n hängen wiederum nur von der Breite a der Gitterlinien und nicht von deren Form ab. Denn aufgrund der um die Funktion $u(v)$ verschobenen Symmetrieachse gilt:

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_{u(v)-\frac{P}{2}}^{u(v)+\frac{P}{2}} g(u, v) \, du = \frac{1}{P} \int_{u(v)-\frac{a}{2}}^{u(v)+\frac{a}{2}} G \, du = \frac{a}{P} \cdot G$$

und

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{P} \int_{u(v)-\frac{P}{2}}^{u(v)+\frac{P}{2}} g(u, v) \cdot \cos[\omega n \cdot (u - A \cdot \sin(\Omega v))] \, du \\ &= \frac{2}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} G \cdot \cos(\omega n u) \, du \\ &= \frac{2}{P} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} G \cdot \cos(\omega n u) \, du \\ &= \frac{2G}{n\pi} \cdot \sin\left(n\omega \cdot \frac{a}{2}\right) \quad n \geq 1 \quad . \end{aligned}$$

Das heißt, die Koeffizienten sind die gleichen wie bei den geraden Gittern und werden für zunehmende $n \geq 1$ immer kleiner, da die Sinusfunktion nur zwischen $+1$ und -1 oszilliert.

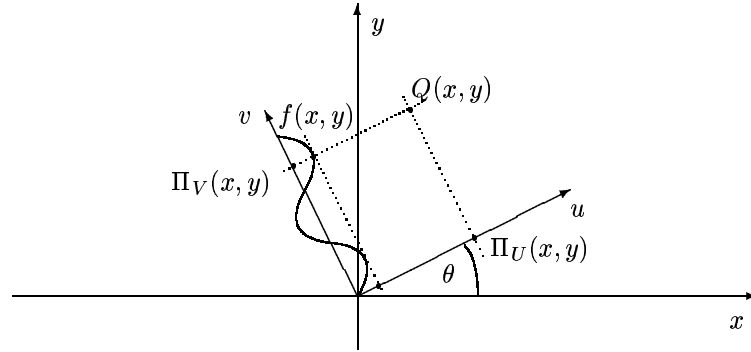


Abbildung 3.7: Koordinatentransformation beim Wellengitter.

Im Gegensatz zu den geraden Gitterlinien spielt bei der Drehung des u - v -Systems in der x - y -Ebene auch die orthogonale Projektion auf den Vektorraum V , der von \vec{e}_v aufgespannt wird, eine Rolle (siehe Abbildung 3.7).

Analog zur orthogonalen Projektion $\Pi_U(x, y)$ gilt:

$$\Pi_V(x, y) = (-x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta)) \cdot \vec{e}_v \quad .$$

Die Auslenkung in u -Richtung des Sinusgitters wird daher gegeben durch

$$f(x, y) = A \cdot \sin [\Omega \cdot (-x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta))] \quad ,$$

so daß sich die approximierende Fourier-Reihe wie folgt darstellen läßt:

$$S_g(x, y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos (\omega n \cdot [x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)] - f(x, y)) \quad .$$

Gitter können beliebige Strukturen aufweisen, so daß ihre Fourier-Reihen in Abhängigkeit einer Funktion Φ – die die entsprechende Gestalt einschließlich der Periode ausdrückt – geschrieben werden:

$$S_g(x, y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos (n \cdot \Phi(x, y)) \quad .$$

3.3.3 Überlagerung zweier Gitter

Aufgrund verschiedener apparativer Beleuchtungs-, Aufnahme und Verarbeitungssituationen können die Funktionen zweier Gitter bei der Überlagerung addiert, subtrahiert und multipliziert werden [8]. Jedoch ist die mathematische Betrachtung in der Regel multiplikativer Natur.

Seien zwei Gitter g_1 und g_2 gegeben durch ihre Fourier-Reihen

$$S_{g_1} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos (n \cdot \Phi_1(x, y))$$

und

$$S_{g_2} = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot \cos (m \cdot \Phi_2(x, y)) \quad .$$

Durch die Multiplikation dieser beiden Reihen wird die Lichtdurchlässigkeit der beiden überlagerten Gitter berechnet:

$$\begin{aligned}
 (S_{g_1} \cdot S_{g_2})(x, y) &= a_0 \cdot b_0 \\
 &+ a_0 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot \cos(m \cdot \Phi_2(x, y)) \\
 &+ b_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \Phi_1(x, y)) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n \cdot b_m \cdot \cos(n \cdot \Phi_1(x, y)) \cdot \cos(m \cdot \Phi_2(x, y)) \quad .
 \end{aligned}$$

Der erste konstante Term stellt zusammen mit dem zweiten beziehungsweise dem dritten Term das Gitter g_1 respektive g_2 – multipliziert mit der additiven Konstanten des jeweils anderen Gitters – dar.

Der letzte Term ist der interessanteste, denn er beschreibt das Moirémuster [2], [5]. Dieser kann mit Hilfe der Euler'schen Additionstheoreme in

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n \cdot b_m \cdot \cos(n \cdot \Phi_1(x, y) - m \cdot \Phi_2(x, y)) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n \cdot b_m \cdot \cos(n \cdot \Phi_1(x, y) + m \cdot \Phi_2(x, y))
 \end{aligned}$$

umgeformt werden.

Laut [5] ist der Fehler zu vernachlässigen, wenn man bei den obigen Doppelsummen nur die Summanden für $n = m$ berücksichtigt, das heißt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n \cdot b_m \cdot \cos(n \cdot \Phi_1(x, y) - m \cdot \Phi_2(x, y)) \approx \sum_{l=1}^{\infty} c_l \cdot \cos(l \cdot \vartheta_1(x, y)) \quad ,$$

wobei $c_l = a_l \cdot b_l$ und $\vartheta_1(x, y) = \Phi_1(x, y) - \Phi_2(x, y)$ sind und analog

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n \cdot b_m \cdot \cos(n \cdot \Phi_1(x, y) + m \cdot \Phi_2(x, y)) \approx \sum_{l=1}^{\infty} c_l \cdot \cos(l \cdot \vartheta_2(x, y))$$

mit $c_l = a_l \cdot b_l$ und $\vartheta_2(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)$.

Denn der größte Einfluß der Summenglieder auf die obigen Reihen ist für $n = m = 1$ mit $a_1 \cdot b_1$ zu erwarten. Diese Glieder kann man als Grundschwingung und die Glieder für $n = m > 1$ als Oberschwingungen einer Fourier-Reihe interpretieren, wobei sämtliche Kosinusfunktionen von ϑ_1 beziehungsweise von ϑ_2 abhängen.

Das bedeutet, daß zwei weitere „Gitter“ – deren Gitterlinien von den Funktionen ϑ_1 und ϑ_2 beschrieben werden – die Lichtdurchlässigkeit beeinflussen.

Im Folgenden sind nur Gitter bestehend aus geraden Linien von Interesse. Zum einen kommen sie in der Praxis am häufigsten vor, zum anderen sind sie lokal eine gute Approximation für Gitter beliebiger Struktur.

Zwei solche Gitter mit den Perioden P_1 und P_2 können in der virtuellen x - y -Ebene derart in einem kleinen Winkel $\alpha \neq 0$ zueinander geneigt werden, daß die y -Achse die Winkelhalbierende dieses Winkels ist. Das heißt:

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, y) &= \frac{2\pi}{P_1} \cdot \left[x \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + y \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \\ \Phi_2(x, y) &= \frac{2\pi}{P_2} \cdot \left[x \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - y \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \quad .\end{aligned}$$

In der Darstellung als parallele Geraden gilt für die Funktionen Φ_1 und Φ_2

$$\begin{aligned}y &= -\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot x + \frac{k \cdot P_1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{beziehungsweise} \\ y &= +\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot x - \frac{l \cdot P_2}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad l \in \mathbb{Z} \quad .\end{aligned}$$

Die Form der zwei neuen Gitter sind bestimmt durch

$$\begin{aligned}\vartheta_1(x, y) &= \Phi_1(x, y) - \Phi_2(x, y) \\ &= \frac{2\pi}{P_1 \cdot P_2} \cdot (P_2 - P_1) \cdot x \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{2\pi}{P_1 \cdot P_2} \cdot (P_1 + P_2) \cdot y \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vartheta_2(x, y) &= \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y) \\ &= \frac{2\pi}{P_1 \cdot P_2} \cdot (P_1 + P_2) \cdot x \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{2\pi}{P_1 \cdot P_2} \cdot (P_2 - P_1) \cdot y \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad .\end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, daß diese beiden Funktionen ϑ_1 und ϑ_2 linear sind. Da der Ursprung des virtuellen Koordinatenkreuzes „auf jeder Knotenpunkt des Netzes“ – also auf jeden Schnittpunkt der Gitter Φ_1 und Φ_2 – liegen kann, wiederholt sich die Gitterstruktur dieser Gitterfunktionen mit einer noch zu bestimmenden Periode. Daher ist folgender Ansatz gerechtfertigt:

$$\begin{aligned}\vartheta_1(x, y) &= \frac{2\pi}{\rho_1} \cdot [x \cdot \cos(\beta_1) + y \cdot \sin(\beta_1)] \quad \text{und} \\ \vartheta_2(x, y) &= \frac{2\pi}{\rho_2} \cdot [x \cdot \cos(\beta_2) + y \cdot \sin(\beta_2)] \quad .\end{aligned}$$

Da alle Punkte der „Basisgitterlinie“ von ϑ_1 ebenfalls auf den Ursprung projiziert werden, muß man einfach die eckige Klammer und damit die ganze Gleichung Null setzen:

$$x \cdot \cos(\beta_1) + y \cdot \sin(\beta_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\cot(\beta_1) \cdot x \quad .$$

Andererseits gilt dann aber auch

$$\Phi_1(x, y) - \Phi_2(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot x \quad .$$

Gleichsetzen der beiden obigen Steigungen ergibt

$$\beta_1 = \arctan\left[\frac{P_1 + P_2}{P_2 - P_1} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \quad \text{für} \quad P_1 \neq P_2 \quad .$$

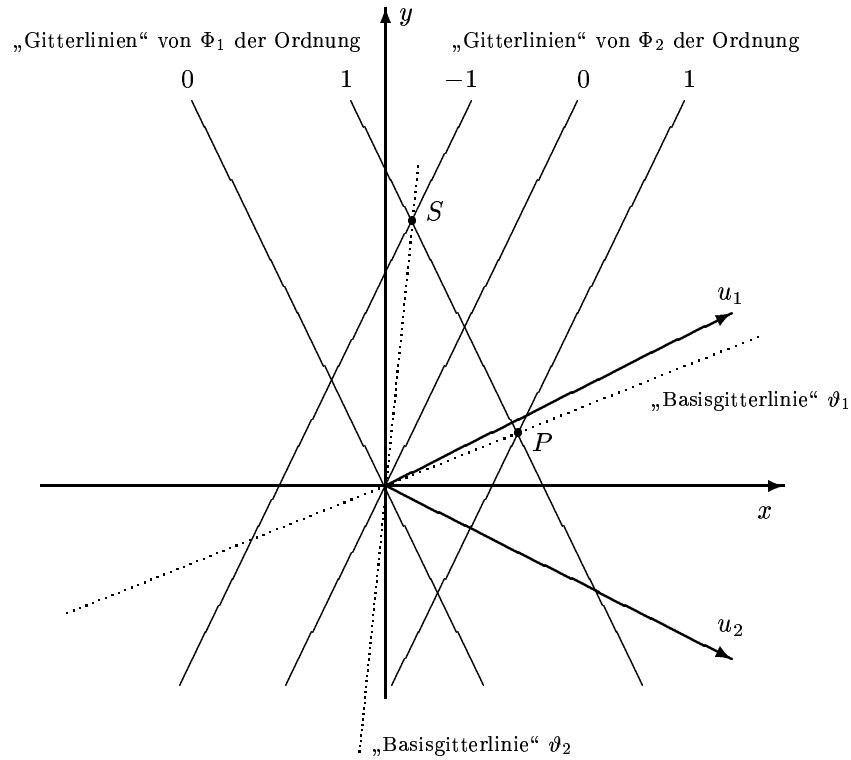


Abbildung 3.8: Detailansicht der Gitterlinien.

Für $P_1 = P_2$ würde die Steigung der Gitterlinien gleich Null betragen und diese wären dann Parallelen zur x -Achse.

Es ist leicht nachzurechnen, daß der Schnittpunkt $P(x_P/y_P)$ der Gitterlinien von Φ_1 und Φ_2 jeweils der Ordnung 1 folgende Koordinaten hat:

$$x_P = \frac{P_1 + P_2}{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{und} \quad y_P = \frac{P_1 - P_2}{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} .$$

Das heißt er liegt auf den Geraden (siehe Abbildung 3.8)

$$\begin{aligned} y &= -\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot x + \frac{P_1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{und} \\ y &= +\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot x + \frac{P_2}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} . \end{aligned}$$

Analog läßt sich die „Basisgitterlinie“ von ϑ_2 darstellen durch die Gerade

$$y = -\cot(\beta_2) \cdot x \quad \text{mit} \quad \beta_2 = \arctan\left[\frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] .$$

Auf dieser Geraden liegt der Schnittpunkt $S(x_S/y_S)$ der Gitterlinien von Φ_1 der Ordnung 1 und Φ_2 der Ordnung -1 (siehe Abbildung 3.8) mit

$$x_S = \frac{P_1 - P_2}{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{und} \quad y_S = \frac{P_1 + P_2}{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad .$$

Diese Struktur wiederholt sich an jedem Schnittpunkt der Gitter Φ_1 und Φ_2 , so daß die Gitter ϑ_1 und ϑ_2 einfach die diagonalen Verbindungslinien dieser Schnittpunkte sind (siehe Abbildung 3.9).

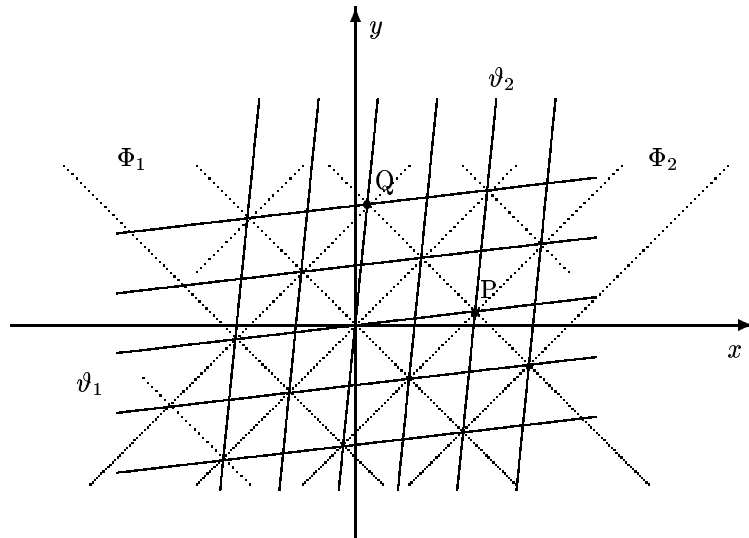


Abbildung 3.9: ϑ_1 und ϑ_2 verbinden die gemeinsamen Punkte von Φ_1 und Φ_2 .

Die Gitterlinie n -ter Ordnung von ϑ_1 ist gegeben durch:

$$y = -\cot(\beta_1) \cdot x + \frac{n\rho_1}{\sin(\beta_1)} \quad n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Für alle Punkte auf dieser Linie nimmt der Ausdruck $x \cdot \cos(\beta_1) + y \cdot \sin(\beta_1)$ bei der orthogonalen Projektion den Wert $n \cdot \rho_1$ an. Daher gilt für die Differenz der Gitter Φ_1 und Φ_2 an diesen Stellen:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) - \Phi_2(x, y) &= n\rho_1 \cdot \frac{2\pi}{\rho_1} \\ &= 2\pi n \\ \Rightarrow y &= \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot x + \frac{n \cdot P_1 \cdot P_2}{P_1 + P_2} \quad . \end{aligned}$$

Durch den Vergleich der y -Koordinatenabschnitte erhält man die Periode des Gitters ϑ_1 :

$$\frac{n\rho_1}{\sin(\beta_1)} = \frac{n \cdot P_1 \cdot P_2}{P_1 + P_2} \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{P_1 \cdot P_2 \cdot \sin(\beta_1)}{P_1 + P_2} \quad .$$

Analog kann man die Periode des Gitters ϑ_2 berechnen:

$$\rho_2 = \frac{P_1 \cdot P_2 \cdot \sin(\beta_2)}{P_2 - P_1} \quad .$$

Die ursprünglichen Perioden P_1, P_2 und der Winkel α bestimmen also das Moirémuster. Daher ist es wichtig, gewisse Spezialfälle neben dem allgemeinen Fall genauer zu untersuchen.

Für alle Punkte auf der Gitterlinie der n -ten Ordnung von ϑ_1 beziehungsweise der m -ten Ordnung von ϑ_2 gilt:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{P_1 \cdot P_2} \cdot (P_2 - P_1) \cdot x \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{2\pi}{P_1 \cdot P_2} \cdot (P_1 + P_2) \cdot y \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 2\pi n \quad ; \\ \frac{2\pi}{P_1 \cdot P_2} \cdot (P_1 + P_2) \cdot x \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{2\pi}{P_1 \cdot P_2} \cdot (P_2 - P_1) \cdot y \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 2\pi m \quad . \end{aligned}$$

Bisher wurde vorausgesetzt, daß der Neigungswinkel α ungleich Null ist. Als die Differenz der Perioden P_1 und P_2 im Nenner auftauchte, wurde die Einschränkung gemacht, daß diese nicht denselben Wert annehmen dürfen.

Angenommen $\alpha = 0$ und $P_1 = P_2 = P$, dann liegen die identischen Gitter exakt übereinander und man kann nichts außergewöhnliches beobachten.

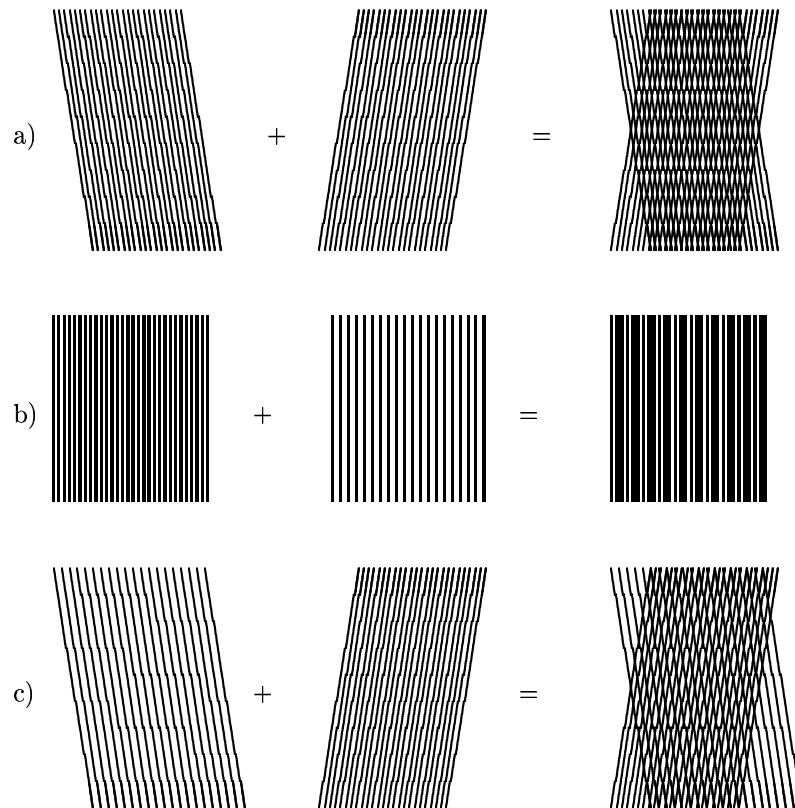


Abbildung 3.10: a) $P_1 = P_2$; $\alpha \neq 0$ b) $P_1 \neq P_2$; $\alpha = 0$ c) $P_1 \neq P_2$; $\alpha \neq 0$.

Wenn zwei Gitter mit gleichem Linienabstand P in einem kleinen Winkel $\alpha \neq 0$ zueinander geneigt überlagert werden, läßt sich jedoch der Moiré-Effekt beobachten:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 : y &= \frac{nP}{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ \vartheta_2 : x &= \frac{mP}{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} .\end{aligned}$$

Die Gitter ϑ_1 und ϑ_2 bilden somit jeweils einen Satz von Linien, die parallel zur x - beziehungsweise y -Achse sind (siehe Abbildung 3.10 a)). Dies hängt von der Größe des Winkels α ab.

Ist der Neigungswinkel α der Gitter Φ_1 und Φ_2 mit ungleichen Perioden gleich Null, so bestehen die resultierenden beiden Gitter nur aus Parallelen zur y -Achse mit ebenfalls verschiedenen Abständen:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 : x &= \frac{n \cdot P_1 \cdot P_2}{P_2 - P_1} \\ \vartheta_2 : x &= \frac{m \cdot P_1 \cdot P_2}{P_1 + P_2} .\end{aligned}$$

Ein Gitter mit „dicken“ Gitterlinien dominiert das Erscheinungsbild (vergleiche Abbildung 3.10 b)).

Im allgemeinen Fall, wenn $P_1 \neq P_2$ und $\alpha \neq 0$ sind (siehe Abbildung 3.10 c)), gilt dann:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 : y &= \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot x + \frac{n \cdot P_1 \cdot P_2}{(P_1 + P_2) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ \vartheta_2 : x &= \frac{P_1 + P_2}{P_1 - P_2} \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot x + \frac{m \cdot P_1 \cdot P_2}{(P_2 - P_1) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} .\end{aligned}$$

Sowohl ϑ_1 , als auch ϑ_2 bilden schräge Gitterlinien, deren Steigungen das gleiche Vorzeichen haben.

Betrachtet man bei der Abbildung 3.10 die Fälle a) und c) aus einer Entfernung von etwa einem Meter, so nimmt man nur noch eines der Gitter ϑ_1 und ϑ_2 wahr. Die Schenkel des kleineren Winkels α können erst in größerer Entfernung vom Auge voneinander unterschieden werden. Daher dominiert das Gitter mit der größeren Periode das Erscheinungsbild (siehe Abbildung 3.11).

3.3.4 Fazit

Das bedeutet, daß das Gitter $\vartheta_1 = \Phi_1 - \Phi_2$ das Erscheinungsbild prägt und das Gitter $\vartheta_2 = \Phi_1 + \Phi_2$ keinen großen Einfluß auf den Moiré-Effekt hat, denn aufgrund der größeren Periode ($\rho_1 > \rho_2$) erscheinen die Gitterlinien von ϑ_1 breiter ($b_1 > b_2$) als die von ϑ_2 .

3.3.5 Parallelen zur Interferenz

Die Überlagerung zweier Liniengitter weist große Parallelen zur Interferenz ebener Wellen auf.

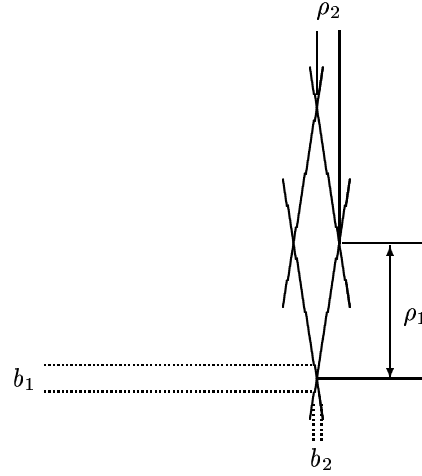


Abbildung 3.11: Die wahrgenommene Breite einer Gitterlinie hängt von dem Abstand zweier solcher Linien ab.

Zwei ebene Wellen mit den Wellenvektoren \vec{k}_1 und \vec{k}_2 gleicher Länge lassen sich mit zeitunabhängiger Phase schreiben:

$$\begin{aligned} W_1(x, y) &= A_1 \cdot e^{ik[x \sin(\theta - \frac{\alpha}{2}) + y \cos(\theta - \frac{\alpha}{2})]} \quad \text{und} \\ W_2(x, y) &= A_2 \cdot e^{ik[x \sin(\theta + \frac{\alpha}{2}) + y \cos(\theta + \frac{\alpha}{2})]} \quad , \end{aligned}$$

wobei θ wieder der Winkel zwischen der Winkelhalbierenden der Wellenvektoren und der y -Achse ist.

Beträgt der Winkel $\theta = 90^\circ$, so teilt die x -Achse den Winkel zwischen den beiden Wellenvektoren und die Phasenfunktionen

$$\begin{aligned} \phi_1 &= k \left[x \sin \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) + y \cos \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \\ &= k \left[x \cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right) - y \sin \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right] \\ &= k \left[x \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) + y \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \phi_2 &= k \left[x \sin \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right) + y \cos \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right) \right] \\ &= k \left[x \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) - y \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

stimmen mit den Gitterfunktionen Φ_1 und Φ_2 – bei gleicher Periodizität P – überein. Man beachte, daß die Wellenzahl k das Verhältnis von 2π zur Wellenlänge λ ist.

Darüber hinaus werden sowohl das Interferenz- als auch das Moirémuster durch Terme bestimmt, die von der Differenz der Phasenfunktionen $\phi_1 - \phi_2$ bzw. der Gitterfunktionen $\Phi_1 - \Phi_2$ abhängen. Dies gilt wie bei der Interferenz auch im allgemeinen Fall des Moiré-Effekts, wenn die Wellenlängen respektive die Periodizitäten verschieden sind.

3.4 Schatten-Moiré-Verfahren

Der Moiré-Effekt kann sehr hilfreich sein, um Verformungen von Oberflächen anzuzeigen [1]. Dazu wird oft eine einfache Methode verwandt: das sogenannte Schatten-Moiré-Verfahren.

Die Abbildung 3.12 zeigt das Prinzip dieses Verfahrens. Eine Lichtquelle L beleuchtet ein Gitter G , dessen Schatten auf den Schirm S geworfen wird. Wenn der Schirm dicht genug hinter dem Gitter angebracht wird, entsteht dort auch ein Streifenmuster. Wird dieser Schatten durch das Gitter betrachtet, so wird ein Moirémuster wahrgenommen.

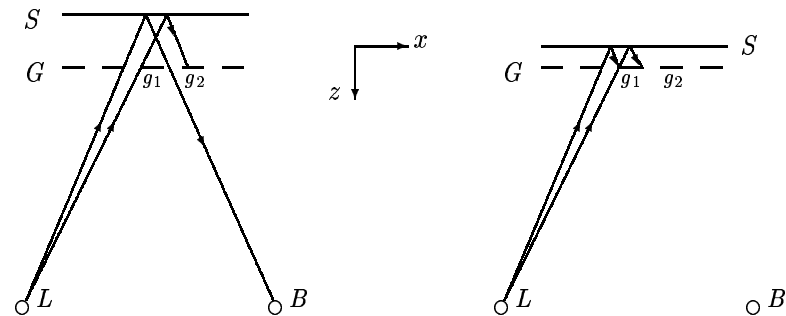


Abbildung 3.12: Prinzip des Schatten-Moiré-Verfahrens.

Auf der linken Seite der obigen Abbildung wird ein heller Streifen auf den Schirm S projiziert. Die Sicht von der Stelle B auf diesen Streifen wird durch die Gitterlinie g_2 ein bißchen verdeckt, so daß an dieser Stelle nicht die maximale Intensität beobachtet werden kann.

Was passiert, wenn der Schirm S in die positive z -Richtung verschoben wird, deutet die rechte Seite dieser Abbildung an: der helle Streifen wandert in die negative x -Richtung, so daß die wahrgenommene Intensität an dieser Stelle allmählich anwächst und dann – nachdem sie ihr Maximum erreicht hat – wieder abnimmt bis sie komplett von der Gitterlinie g_1 ausgeblendet wird.

Wird der Schirm S jedoch in die negative z -Richtung verschoben, so wandert der helle Streifen in die positive x -Richtung, bis die Gitterlinie g_2 ihn ganz verdeckt. Entfernt sich der Schirm S noch weiter vom Gitter G , so wird dieser Streifen wieder vom Punkt B aus sichtbar durch den Spalt rechts der Gitterlinie g_2 , jedoch unter einem veränderten Blickwinkel. Durch die Verschiebung des Schirms S in z -Richtung wiederholt sich periodisch eine Intensitätsverteilung dieses hellen Streifens in x -Richtung.

Der Abstand zweier zum Gitter G parallelen Ebenen, in denen der helle Streifen vollständig zu sehen ist, nennt man Konturintervall C . Diese Konturintervalle sind proportional zur sogenannten Gitterkonstanten P und werden mit zunehmendem Winkel zwischen der Projektions- und Beobachtungsrichtung kleiner (siehe Abbildung 3.13).

Um den numerischen Wert dieser Abstände zu bestimmen, ist es sinnvoll den gesamten Winkel in den Projektionswinkel α und den Beobachtungswinkel β zu zerlegen (siehe Abbildung 3.14).

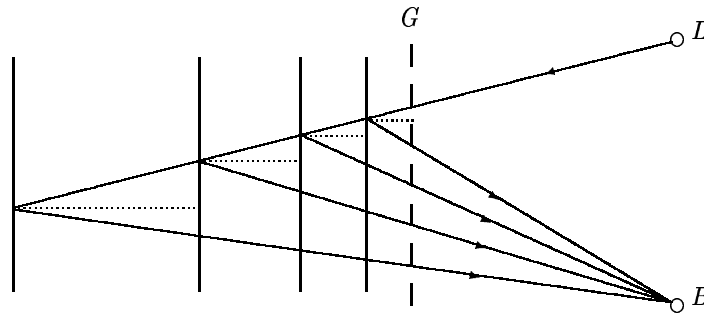
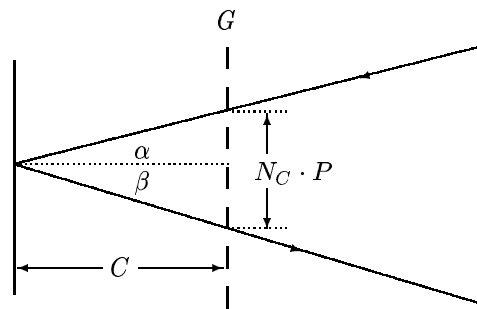


Abbildung 3.13: Die Konturintervalle sind im allgemeinen nicht äquidistant.


 Abbildung 3.14: Bestimmung des Abstandes C .

Die Anzahl N_C der Gitterlinien zwischen dem „Projektionsstrahl“ und dem „Beobachtungsstrahl“ wird oft als die Ordnung des Konturintervalls C bezeichnet, denn zwischen diesen beiden Größen besteht folgender Zusammenhang:

$$N_C \cdot P = C \cdot \tan(\alpha) + C \cdot \tan(\beta) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{N_C \cdot P}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)} \quad .$$

Dieses Prinzip läßt sich auch für gekrümmte Flächen verallgemeinern [2], [7] (siehe Abbildung 3.15).

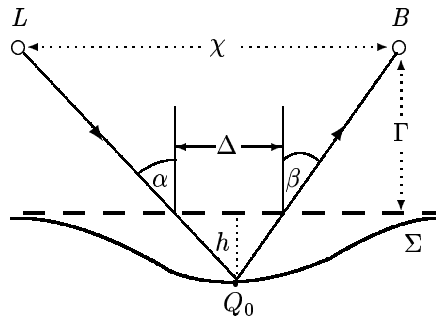


Abbildung 3.15: Schatten-Moiré-Verfahren angewandt auf unebene Flächen.

Versieht man das Gitter mit einem virtuellen x - y -Koordinatenkreuz, so gilt für den Punkt Q_0 auf der Fläche Σ :

$$\Delta = h(x, y) \cdot [\tan(\alpha) + \tan(\beta)] \quad \Rightarrow \quad h(x, y) = \frac{\Delta}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)} \quad .$$

Für

$$\Delta = n \cdot P \quad n \in \mathbb{N}$$

liegt der Punkt Q_0 auf einem Konturintervall und ist durch das Gitter sichtbar.

Gilt jedoch

$$\Delta = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot P \quad n \in \mathbb{N} \quad ,$$

dann wird der Punkt Q_0 von einer Gitterlinie verdeckt – vorausgesetzt die Gitterlinie und die Gitterlücke sind gleich groß.

Auf diese Weise wird auf der gesamten Fläche Σ aufgrund der variierenden Distanzen zum Gitter eine topographische Karte projiziert.

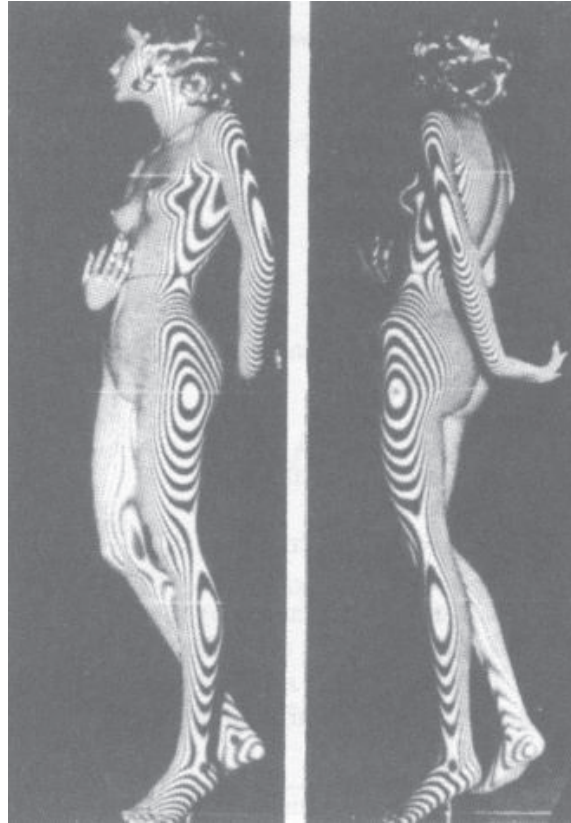


Abbildung 3.16: „Topographie“ eines Modells [2].

Da sich die Winkel α und β an jeder Stelle $(x, y) \in \Sigma$ ändern, hängt das Konturintervall und damit die „Höhenbestimmung“ stark von den Koordinaten der Oberfläche ab. Wenn jedoch die Lichtquelle L den Abstand χ zum Beobachter B hat und diese beiden Punkte den Betrag Γ vom Gitter G entfernt sind, dann gilt folgende Beziehung:

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\chi}{\Gamma + h(x, y)} \quad .$$

Sind die Höhenunterschiede h auf der Oberfläche im Verhältnis zum Abstand Γ vernachlässigbar klein, dann kann der Term

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) \approx \frac{\chi}{\Gamma} = K$$

als Konstante K geschrieben werden [6], da $\Gamma \gg h(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Sigma$. Daher können auch die Konturintervalle

$$C = \frac{P}{K} \cdot N_C$$

der Ordnungen N_C auf der gesamten Oberfläche als konstant betrachtet werden.

Ist die Oberfläche oder Teile davon zu weit entfernt vom Gitter, so treten Beugungseffekte auf und der projizierte Schatten ist dort nicht mehr scharf. Deshalb ist das Schatten-Moiré-Verfahren bei großen Oberflächen nur für grobe Messungen geeignet.

Jedoch ist die Methode recht einfach und günstig in der Durchführung, so daß diese oft benutzt wird, um Formen und Flächen zu messen beziehungsweise zu kontrollieren. Hauptsächlich wird das Verfahren in der Medizin benutzt, um zum Beispiel eine Skoliose zu diagnostizieren. Takasaki entwickelte zu diesem Zweck ein Gitter aus Kunstfaser, das mit matter, schwarzer Farbe lackiert wurde. Die Gitterkonstante P lag bei $1,5 - 2,0 \text{ mm}$, wobei die Spaltenbreite genau die Hälfte betrug. Abbildung 3.16 zeigt dieses Schatten-Moiré-Verfahren angewandt auf ein Mannequin [2].

Literatur zu Kapitel 3

- [1] Baumann Peter Helmut. *Messung von aerodynamisch bedingten Modellverformungen im Windkanal mittels Moiré-Interferometrie*. Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt, Köln 1994.
- [2] Gåsvik Kjell. *Optical metrology*. John Wiley & Sons, Chichester 1996.
- [3] Hering Ekbert/Martin Rolf/Stohrer Martin. *Physik für Ingenieure*. VDI-Verlag, Düsseldorf 1989.
- [4] Litfin Gerd. *Technische Optik in der Praxis*. Springer Verlag, Heidelberg 1997.
- [5] Malacara Daniel. *Optical shop testing*. John Wiley & Sons, Chichester 1992.
- [6] Rastogi Pramod. *Photomechanics*. Springer Verlag, Heidelberg 2000.
- [7] Rohrbach Christoph. *Handbuch für experimentelle Spannungsanalyse*. VDI-Verlag, Düsseldorf 1989.
- [8] Seib Michael. *Modifikation von CCD-Bildsensoroberflächen zur Steigerung des Höhenauflösungsvermögens von Moiré-Topographiemeßplätzen*. VDI-Verlag, Düsseldorf 1995.
- [9] Young Matt. *Optik, Laser, Wellenleiter*. Springer Verlag, Heidelberg 1993.

Kapitel 4

Optische Diagnoseverfahren

Um das Auftreten beziehungsweise die Verschlechterung einer Skoliose diagnostizieren zu können, wurden einige optische Verfahren entwickelt. Zu diesen zählen die Moiré-Topographie, das sogenannte ISIS-Verfahren und die Rasterstereographie.

4.1 Moiré-Topographie

4.1.1 Darstellung von Asymmetrien des Rückens mit Hilfe des Schatten-Moiré-Verfahrens

Bei strukturellen Skoliosen neigen sich einzelne Wirbelkörper zur Seite und erfahren dabei eine Rotation. Aufgrund der im Brustbereich von dieser Drehung mitgenommenen Rippen, ist beim nach vorne gebückten Patienten ein Rippenbuckel klar zu erkennen (siehe Abbildung 4.1).

Da sich diese spinale Verformungen beim Patienten während der Wachstumsphase in der Pubertät einstellen, sind regelmäßige Untersuchungen in dieser Zeit sinnvoll. Jedoch wären Röntgenaufnahmen sehr schädlich, zumal der Rippenbuckel – die meist augenscheinlichste kosmetische Verformung des Rückens – nicht gut auf den Röntgenbildern zu erkennen ist.

Skoliosen ziehen eine Veränderung der Körperoberfläche – hauptsächlich in Form von Links-Rechts-Asymmetrien – mit sich (siehe Abbildung 4.2). Daher sind optische Verfahren zur Diagnose und Beurteilung dieser Krankheit eine echte Alternative, denn diese können beliebig oft ohne gesundheitliche Beeinträchtigungen angewandt werden.

Vorteile

Eine Möglichkeit die auftretenden Asymmetrien des Rückens sichtbar zu machen, ist die sogenannte Moiré-Topographie. Takasaki war der erste, der Schatten-Moiré-Verfahren im medizinischen Bereich anwandte, um dreidimensionale Körperoberflächen als zweidimensionale, topographische Karten darzustellen [10]. Dabei werden die Patienten direkt hinter ein Gitter, bestehend aus schwarz lackierten Kunstfaser positioniert. Der Abstand

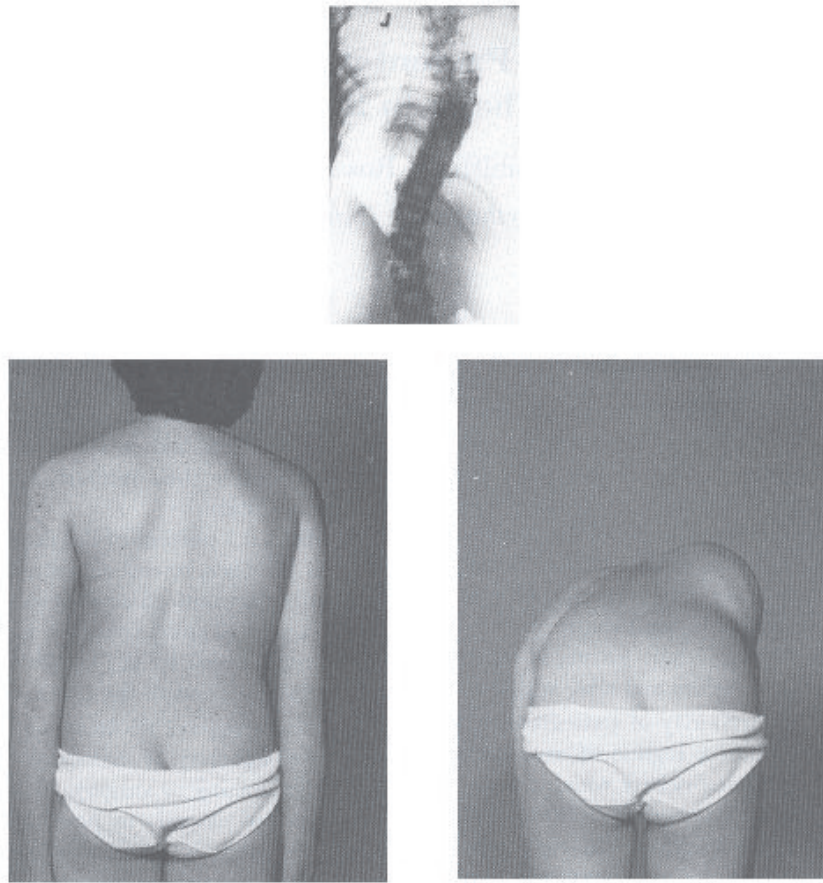


Abbildung 4.1: Die Skoliose ist sowohl auf dem Röntgenbild als auch am Rippenbuckel klar zu erkennen [11].

zweier Gitterfasern beträgt etwa $1,5 - 2,0 \text{ mm}$, so daß der Schatten des Gitters auf der Oberfläche durch dieses betrachtet werden kann. Die Moiréstreifen zeichnen eine topographische Karte, in der „Höhenunterschiede“ leicht wahrgenommen werden können. Diese Methode ist schnell, einfach, günstig und zuverlässig, da jede geringste Veränderung der Rückenoberfläche angezeigt wird [8].

Moiré-Topographie ist eine einfache Technik, um die durch Skoliose verursachte Asymmetrie des Rückens mit großer Genauigkeit dreidimensional auszuwerten. Gerade beim Entstehen der Skoliose ist die Moiré-Topographie besser geeignet als die Diagnose aufgrund von Beugetests der Patienten. Vergleiche mit Röntgenaufnahmen haben diese These in klinischen Studien belegt [1].

Nachteile

Jedoch erfordert die Moiré-Topographie sehr viel Geschick und Erfahrung, um die genauen Stellen und das genaue Ausmaß der Links-Rechts-Asymmetrien zu erkennen. Ganz abgesehen davon, weist auch ein gesunder Patient, der nicht an Skoliose erkrankt ist, nicht unbedingt eine exakte Rückensymmetrie auf.

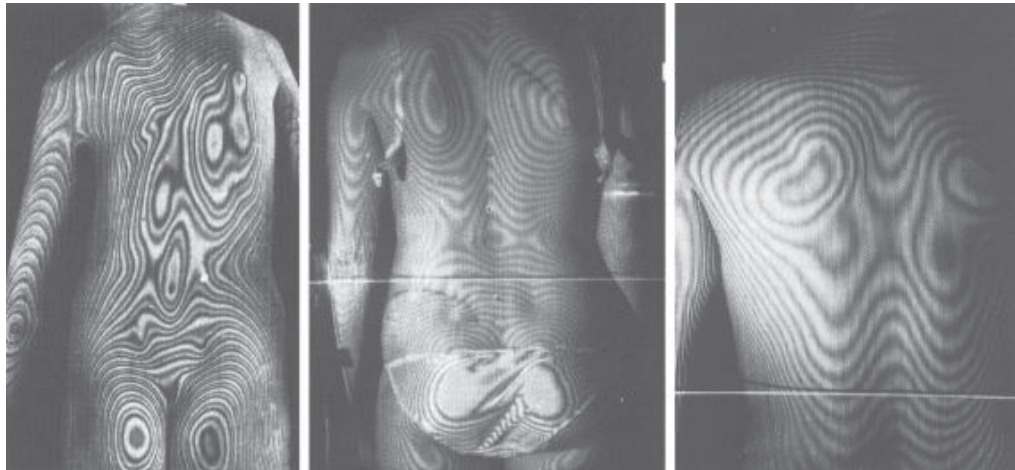


Abbildung 4.2: Durch die Moiré Topographie lassen sich die Asymmetrien des Rückens in beeindruckender Weise leicht sichtbar machen [7].

Des weiteren reagieren die „Höhenlinien“ des Schatten-Moiré-Verfahrens sehr sensibel auf die Positionierung des Patienten zum Gitter. Für vergleichende Studien müßte er daher gezwungen werden, immer ungefähr dieselbe Position einzunehmen. Dabei könnte der Patient verkrampfen und markante Deformitäten, die Rückschlüsse auf das Krankheitsbild zulassen würden, könnten für die Dauer der Untersuchung kurzfristig verschwinden.

Auswertung

Um die topographischen Karten des Rückens objektiv auszuwerten, wurden verschiedene Methoden entwickelt. Diese reichen vom Abzählen der „Höhenlinien“ bis hin zu vollständigen dreidimensionalen Rekonstruktionen der Rückenoberfläche [11]. Jedoch brauchen diese Verfahren Zeit und die Komplexität der Moiré-Technik wird erhöht, so daß deren größte Vorteile verschwinden: Einfachheit und Schnelligkeit.

4.1.2 Differentialgeometrische Klassifikation

Bei der Moiré-Topographie steht der Patient direkt hinter dem Gitter, so daß keine Beugungseffekte auftreten und das entstehende Muster deutlich zu sehen ist. Der Abstand zwischen Lichtquelle und Beobachter betrage χ . Des weiteren sei deren Entfernung Γ zum Gitter ausreichend groß, um die Konturintervalle

$$C = \frac{P}{K} N_C$$

der Ordnung N_C auf der gesamten Rückenoberfläche als konstant betrachten zu können, wobei

$$K \approx \frac{\chi}{\Gamma} .$$

Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist, elliptische, parabolische und hyperbolische Punkte aufgrund der Moirémuster in deren Umgebung zu klassifizieren. Sämtliche Konturintervalle sind zum Gitter parallele Ebenen, daher sind die wahrgenommenen Muster einfach nur Schnittkurven der Oberflächen.

Schnitt eines elliptischen Paraboloid

Bei dem Schnitt eines elliptischen Paraboloids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2cz = 0 \quad a, b, c \neq 0$$

mit einer Ebene

$$E: \quad n_x x + n_y y + n_z z = s$$

in der Koordinatendarstellung können mehrere Fälle auftreten.

Fall 1: $n_z = 0$

a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n_x = 1$

$$\Rightarrow \quad x = s - n_y y \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{(s - n_y y)^2}{2ca^2} - \frac{y^2}{2cb^2}$$

b) $n_x = 0$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n_y = 1$

$$\Rightarrow \quad y = s \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{x^2}{2ca^2} - \frac{s^2}{2cb^2}$$

In beiden Unterfällen wird die Umgebung eines elliptischen Punktes von der Seite betrachtet und eine Parabel wahrgenommen.

Fall 2: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n_z = 1$

Es gilt also: $z = s - n_x x - n_y y$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x - cn_x a^2)^2}{a^2} + \frac{(y - cn_y b^2)^2}{b^2} = (cn_x a)^2 + (cn_y b)^2 - s$$

Der hintere Term kann positive und negative Werte annehmen oder auch ganz verschwinden. Verschwindet er ganz, so schneidet die Ebene E das Paraboloid in nur einem einzigen Punkt. Dieser diskrete Punkt wird vom menschlichen Auge nicht registriert. Wird die rechte Seite negativ, gibt es keinen Schnittpunkt. Jedoch kann dieser Fall auch ausgeschlossen werden, denn irgendein Konturintervall wird das Paraboloid schon schneiden. In diesem Fall wird der Wert positiv sein und eine Ellipse wird wahrgenommen.

Schnitt einer parabolischen Zylinderfläche

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + 2bz = 0 \quad a, b \neq 0$$

stellt eine parabolische Zylinderfläche dar. Auch hier lassen sich beim Schnitt mit der Ebene E folgende Fälle unterscheiden:

Fall 1: $n_z = 0$

a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n_x = 1$

$$\Rightarrow \quad z = -\frac{(s - n_y y)^2}{2ca^2}$$

b) $n_x = 0$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n_y = 1$

$$\Rightarrow z = -\frac{x^2}{2ca^2}$$

Wenn die Umgebung eines parabolischen Punktes von der Seite betrachtet wird, dann wird immer eine Parabel zu sehen sein.

Fall 2: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n_z = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2ba^2} - n_x x - n_y y + s = 0$$

a) $n_y \neq 0$

$$\Rightarrow y = \frac{(x - bn_x a^2)^2}{2bn_y a^2} + \frac{s}{n_y} - \frac{bn_x^2 a^2}{2n_y}$$

b) $n_y = 0$

$$\Rightarrow \frac{(x - bn_x a^2)^2}{2ba^2} = \frac{bn_x^2 a^2}{2} - s$$

Im ersten Unterfall gleicht der Schnitt wieder einer Parabel. Im zweiten Unterfall jedoch resultieren für

$$\frac{bn_x^2 a^2}{2} - s > 0$$

zwei parallele Geraden beziehungsweise eine Gerade, wenn dieser Term verschwindet. Theoretisch kann dieser Ausdruck wieder negativ werden, jedoch wird für irgendein Konturintervall der Parameter s so beschaffen sein, daß dieser Fall ignoriert werden kann.

Schnitt eines hyperbolischen Paraboloids

Ein hyperbolisches Paraboloid ist in algebraischer Form gegeben durch

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2cz = 0 \quad a, b, c \neq 0 \quad .$$

Beim Schnitt mit der Ebene E muß wieder eine Fallunterscheidung gemacht werden.

Fall 1: $n_z = 0$

a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n_x = 1$

$$\Rightarrow z = \frac{y^2}{2cb^2} - \frac{(s - n_y y)^2}{2ca^2}$$

b) $n_x = 0$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n_y = 1$

$$\Rightarrow z = -\frac{x^2}{2ca^2} + \frac{s^2}{2cb^2}$$

Bei der Seitenansicht erscheint die Umgebung des hyperbolischen Punktes wiederum als Parabel.

Fall 2: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n_z = 1$

$$\Rightarrow \frac{(x - cn_x a^2)^2}{a^2} - \frac{(y - cn_y b^2)^2}{b^2} = (cn_x a)^2 - (cn_y b)^2 - s$$

Diese Gleichung stellt für eine positive rechte Seite eine Hyperbel dar. Negative Werte sind aus schon erwähnten Gründen genauso wenig von Interesse wie eine verschwindende rechte Seite.

4.1.3 Fazit

Bei der Seitenansicht unterscheiden sich die Schnittkurven der Umgebung eines elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Punktes in ihrer Art nicht. Es wird immer eine Parabel wahrgenommen. Jedoch ist dieser Fall in der Praxis ohne größeres Interesse, denn der menschliche Rücken weist keine bizarren Formen auf. Daher lassen sich die Punkte für den relevanten Fall ($n_z \neq 0$) theoretisch danach klassifizieren, ob auf der Aufnahme Ellipsen, Geraden oder Hyperbeln zu erkennen sind, was sich unter Umständen sehr schwierig gestalten kann (siehe Abbildung 4.2 links).

Zudem kann sich das lokale Erscheinungsbild der Moirémuster je nach Entfernung des Patienten zum Gitter sehr schnell verändern. Zum Beispiel ergibt ein Abstand für χ von 2 m zwischen der Lichtquelle und dem Beobachter, die beide die Distanz $\Gamma = 3\text{ m}$ zum Gitter aufweisen, für das Konturintervall der Ordnung N_C :

$$C = \frac{P}{K} N_C = 3 N_C \text{ mm} \quad ,$$

wobei die Gitterkonstante $P = 2\text{ mm}$ betrage.

Daher können schon leichte Bewegungen des Patienten von nur 1 mm das qualitative Bild drastisch verändern. Aufgrund dieser Sensibilität ist dieses Verfahren lediglich dazu geeignet den Rücken auf Links-Rechts-Asymmetrien zu untersuchen.

4.2 Das ISIS-Verfahren

4.2.1 Der ISIS-Scanner

Eine direkte Methode die Rückenoberfläche als dreidimensionales Bild darzustellen ist das ISIS-Verfahren. Dabei ist ISIS die Abkürzung für „Integrated Shape Investigation System“. Herzstück beim ISIS-Verfahren ist ein spezieller Scanner. Dieser Scanner besteht aus einem Projektor und einer darunterliegenden Kamera (siehe Abbildung 4.3).

Der Projektor wirft durch den Spalt einer Blende vor der Linse einen ebenen Lichtstrahl auf den Rücken, der dann unter einem gewissen Winkel als zweidimensionale Linie von der Kamera wahrgenommen wird. Die geometrische Anordnung der Aperatur zum Patienten ist vollständig bekannt [12]. Daher ermöglichen die Koordinaten der gesamten zweidimensionalen Linien, die bei der Drehung des Scanners um eine horizontale Achse erfaßt werden, die Berechnung der kompletten dreidimensionalen Oberfläche.

4.2.2 Auswertung der Daten

Für den Vergleich von zwei Aufnahmen eines Patienten wäre ein individuelles, auf körperliche Merkmale basierendes Koordinatensystem wünschenswert. Solche Merkmale können charakteristische Punkte im Körper oder auf der Körperoberfläche sein, welche sich aufgrund ihrer Form oder Funktion selbst definieren und anatomische Landmarken genannt werden.

Daher werden beim ISIS-Verfahren schwarze, selbstklebenden Rechtecke ($9 \times 16\text{ mm}$) aus Papier auf bestimmte, abgetastete Stellen des Rückens angebracht. Als oberster Markie-

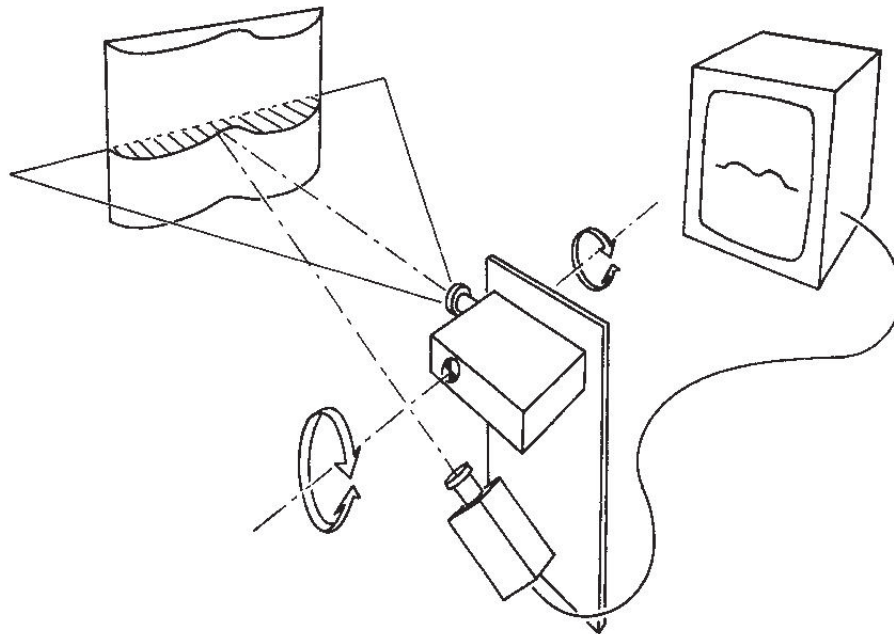


Abbildung 4.3: Darstellung der Funktionsweise eines ISIS-Scanner [12].

rungspunkt dient der siebte Halswirbel (*vertebra prominens*), der meist durch einen besonders hervorspringenden Dornfortsatz gekennzeichnet ist. Das Kreuzbein (*sacrum*) und die zwei Grübchen unterhalb, die den oberen, hinteren Kamm des Darmbeins (*posterior superior iliac spine*) andeuten, bilden die untere Grenze der anatomischen Landmarken. Dazwischen werden noch etwa weitere acht Dornfortsätze von Wirbeln markiert (siehe Abbildung 4.4). Das virtuelle Koordinatensystem hat dann seinen Ursprung im siebten Halswirbel. Die senkrechte Lotlinie bildet die y -Achse, die x -Achse ist die Horizontale und die Tiefen werden von den z -Koordinaten angegeben.

Um die gescannten Daten auszuwerten, wurden verschiedene Methoden entwickelt.

Die linke Seite der Abbildung 4.5 zeigt den Rumpf eines Patienten. Die Landmarken sind als schwarze Punkte dargestellt und werden mit einer durchgezogenen Linie verbunden. Parallel dazu verlaufen beidseitig im Abstand von einem Zehntel der Distanz zwischen *vertebra prominens* und *sacrum* zwei weitere Linien. In dem Bereich zwischen diesen beiden Linien wird der größte direkte Einfluß der Wirbelsäule auf die Rückenoberfläche angenommen [12].

Die gestrichelte Linie – leicht rechts versetzt zur Verbindung der Landmarken – gibt den geschätzten Verlauf der Wirbelsäule an. Diese Schätzung beruht auf der Tatsache, daß bei einer Skoliose die Wirbelkörper neben dem Ausbrechen aus der Lotlinie auch eine Rotation erfahren, bei der sie die Rippen mitnehmen. Je stärker die Deformation der Oberfläche, desto größer die Rotation der Wirbel und damit auch die Verbiegung der Wirbelsäule (vergleiche rechte Seite Abbildung 4.5).

Der erste schwarze Punkt von oben beziehungsweise von unten gesehen, der nicht auf der geschätzten Verlaufslinie liegt, muß demnach also den oberen respektive den unteren Neutralwirbel markieren. Diese Neutralwirbel sind am wenigsten rotiert dafür aber



Abbildung 4.4: Der Patient wird vor dem Scannen „markiert“ [11].

am stärksten geneigt und haben normale Rechteckform. Sie beinhalten damit die Eigenschaft von Wendepunkten. Die Neigungen ihrer Grundflächen werden durch die geraden gestrichelten Linien dargestellt, die im sogenannten Cobbwinkel zueinander geneigt sind.

Obwohl die Bestimmung des Cobbwinkels auf diese Art ganz von der richtigen Einschätzung der Oberflächendaten abhängt und vom Ergebnis der Röntgenaufnahmen abweichen kann, haben klinische Studien eine große Übereinstimmung der beiden Meßmethoden belegt [12].

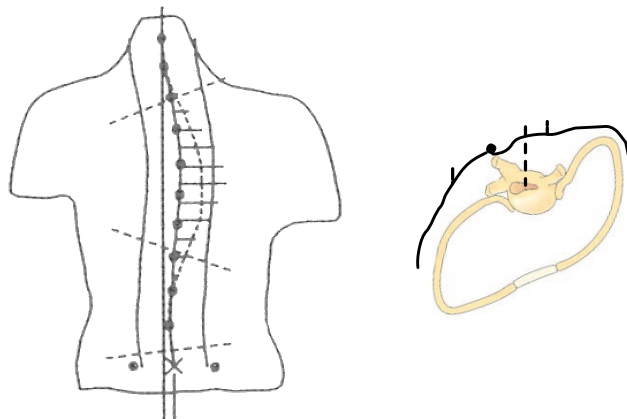


Abbildung 4.5: Winkelmessung nach Cobb aufgrund des geschätzten Verlaufs der Wirbelsäule [11].

Bei einer anderen Methode wird der Rumpf an den Markierungen in Querschnitte zerlegt. Auch hier ist bei jedem Schnitt der äquidistante Bereich links und rechts der Landmarke von größtem Interesse.

Die Rotation des dazugehörenden Wirbels läßt sich dann einfach durch den Neigungswinkel vom höher zum tiefer gelegenen Randpunkt dieses Bereiches ablesen (vergleiche Abbildung 5.3 mit Tabelle 5.1 auf Seite 68).

Bei diesen Methoden ist eine Markierung des Patienten unerlässlich. In der Praxis dauert dieser Vorgang nur eine Minute und die Landmarken können mit einer Genauigkeit von 5 mm wieder an derselben Stelle positioniert werden. Um die dadurch entstehende Ungenauigkeit möglichst klein zu halten, ist großes Geschick vom Klinikpersonal beim ertasten der einzelnen Wirbel gefordert.

Es stellt sich die Frage, ob es eine bessere Methode als die des ertastens gibt, um die anatomischen Landmarken zu lokalisieren oder ob man vielleicht ganz darauf verzichten kann. Darüber hinaus ist ein weiterer Aspekt von großem Interesse: Gibt es eine bessere Darstellung der gescannten Daten, um eine fortschreitende Deformation des Rückens unabhängig von der Haltung des Patienten zu erkennen?

4.2.3 Ein völlig neuer Ansatz

Die Kurve entlang der Wirbelsäule

Ein wesentliches Merkmal des menschlichen Rückens ist, daß der Verlauf der Wirbelsäule zwischen dem siebten Halswirbel und dem Kreuzbein durch eine Mulde gekennzeichnet ist. Diese wird zum einen von leicht nach hinten gewölbten Rippen und zum anderen durch die Rückenmuskulatur gebildet. Daher ist es naheliegend, eine dreidimensionale Raumkurve zu konstruieren, die sich durch diese Vertiefung windet.

Aufgrund der beim Scannen gesammelten Daten läßt sich der Rumpf des Patienten bestimmen, der im relevanten Bereich in Querschnitte zerlegt werden kann. Die Querschnitte lassen sich durch „Höhenfunktionen“ beschreiben. Ungefähr in der Mitte jedes Querschnitts weist diese Funktion ein lokales Minimum auf, das einen „Muldenpunkt“ angibt. Durch diese diskreten Tiefpunkte $\{A_0, \dots, A_m\}$ läßt sich eine dreidimensionale, kubische Splinekurve legen, die jeden Punkt A_i mit dazugehörigen Ortsvektor

$$\vec{a}_j = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad \text{für } j = 0, \dots, m$$

interpoliert.

Eine Darstellung dieser Kurve \mathfrak{s} wäre:

$$\mathfrak{s}(\lambda) = \vec{p}_0(\lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} \vec{c}_j (\lambda - \lambda_j)_+^3 \quad \lambda \in [0, 1] \quad ,$$

mit geeigneten Vektoren

$$\vec{c}_j = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_j \\ \mathfrak{y}_j \\ \mathfrak{z}_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } j = 1, \dots, m-1 \quad ,$$

so daß gilt:

$$\mathfrak{s}(0) = \vec{a}_0 \quad ; \quad \mathfrak{s}(1) = \vec{a}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{s}(\lambda_j) = \vec{a}_j \quad \text{für } j = 1, \dots, m-1 \quad .$$

Die Einträge der Vektoren \vec{c}_j ($j = 1, \dots, m-1$) können leicht bestimmt werden, indem man bei der vektoriellen Funktion

$$\mathfrak{s}(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\lambda) \\ \gamma_2(\lambda) \\ \gamma_3(\lambda) \end{pmatrix}$$

jede Funktionskomponente γ_i ($i = 1, 2, 3$) separat betrachtet.

Die Funktion

$$\gamma_1(\lambda) = p_0^{\mathfrak{r}}(\lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} \mathfrak{r}_j (\lambda - \lambda_j)_+^3 \quad \lambda \in [0, 1]$$

interpoliert alle ersten,

$$\gamma_2(\lambda) = p_0^{\mathfrak{h}}(\lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} \mathfrak{h}_j (\lambda - \lambda_j)_+^3 \quad \lambda \in [0, 1]$$

alle zweiten und

$$\gamma_3(\lambda) = p_0^{\mathfrak{z}}(\lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} \mathfrak{z}_j (\lambda - \lambda_j)_+^3 \quad \lambda \in [0, 1]$$

alle dritten Einträge der Ortsvektoren \vec{a}_j ($j = 0, \dots, m$).

Bestimmung des Cobb-Winkels

Der Körper ist immer bestrebt eine aufrechte Haltung zu bewahren. Daher bilden sich bei einer partiellen Skoliose oberhalb und unterhalb der Hauptkrümmung einer Wirbelsäule kompensatorische Gegenkrümmungen. Die Wirbel an den Übergängen der Hauptkrümmung in die Gegenkrümmungen werden Neutralwirbel genannt, die eine normale Rechteckform haben und deren Grundplatten den sogenannten Cobb-Winkel einschließen.

Da die Splinekurve \mathfrak{s} den Verlauf der Wirbelsäule widerspiegelt, müssen die Lagen der Neutralwirbel mit denen der Wendepunkte übereinstimmen. Das heißt, die Krümmung dieser Funktion müßte dort verschwinden:

$$\mathfrak{s}''(\lambda) = \vec{0} \quad .$$

Aufgrund der rechteckigen Form eines Neutralwirbels steht dann der Tangentialvektor der dreidimensionalen Raumkurve \mathfrak{s} an dieser Stelle senkrecht auf dessen zueinander parallelen Grundplatten. Wenn es also möglich ist, die Wendepunkte mit Hilfe der Spline-Methode zu bestimmen, dann kann man den Cobb-Winkel α einfach mit Hilfe der beiden Tangentialvektoren berechnen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathfrak{s}'(\lambda_I) \cdot \mathfrak{s}'(\lambda_{II})}{|\mathfrak{s}'(\lambda_I)| \cdot |\mathfrak{s}'(\lambda_{II})|} \quad \text{mit} \quad \lambda_I, \lambda_{II} \in [0, 1] : \quad \mathfrak{s}''(\lambda_I) = \mathfrak{s}''(\lambda_{II}) = \vec{0} \quad ,$$

da dieser von den Grundplatten der beiden Neutralwirbel eingeschlossen wird.

4.3 Rasterstereographie

4.3.1 Ein einfaches Prinzip

Zu den optischen, berührungslosen Verfahren zählt auch die Rasterstereographie. Dabei steht der Patient nicht mehr unmittelbar hinter einem Gitter, sondern die Gitterlinien befinden sich auf einem Dia und werden mit Hilfe eines Projektors auf die zu vermessende Rückenoberfläche geworfen. Dieses Dia besteht aus einem Glasträger mit aufgedampfter Metallschicht, in die die Rasterlinien eingätzt sind [5].

Die räumliche Information über die Rückenoberfläche ist in der Deformation der aufprojizierten Linien enthalten, die mit einer Kamera photographisch festgehalten werden. Aus diesem Grund muß für eine genaue Auswertung des Bildes die geometrische Anordnung des Projektors und der Kamera zueinander bekannt sein (siehe Abbildung 4.6).

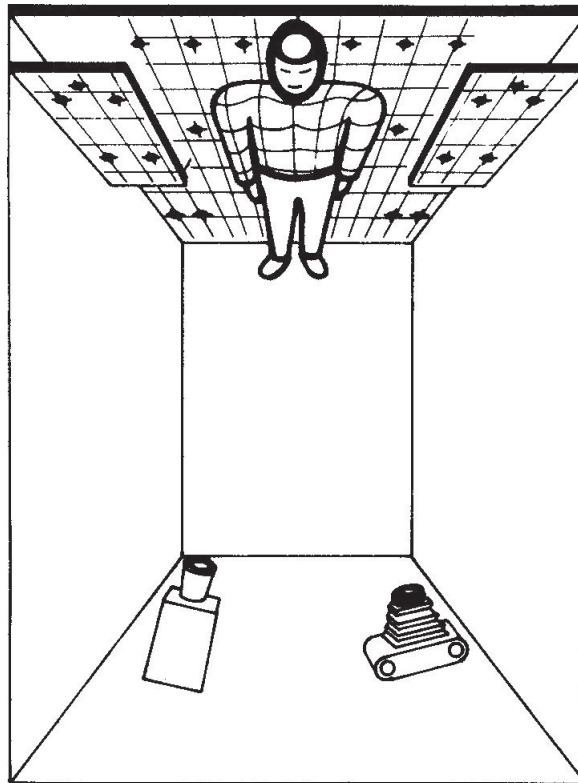


Abbildung 4.6: Prinzip der Rasterstereographie [2].

Die Bilder mit den deformierten Linien können abgetastet und von einem Rechner rekonstruiert werden, so daß die registrierte Oberfläche exakt auf einem Bildschirm dargestellt werden kann (siehe Abbildung 4.7). Ein weiterer Vorteil dieser Digitalisierung ist, daß die Oberfläche nun mathematisch analysiert werden kann.

Muskulatur und Weichteile erzeugen oft ausgeprägte Wülste und Rinnen, die mit der Röntgentechnik kaum lokalisiert werden. Jedoch können diese wie die gesamte Rückenoberfläche mit Hilfe der Rasterstereographie – unabhängig von der Lage des Patienten – objektiv ausgewertet werden. Denn eine grundlegende Formeigenschaft jeder Fläche ist ihre Krümmung und daher können Krümmungskarten des Rückens erstellt werden.

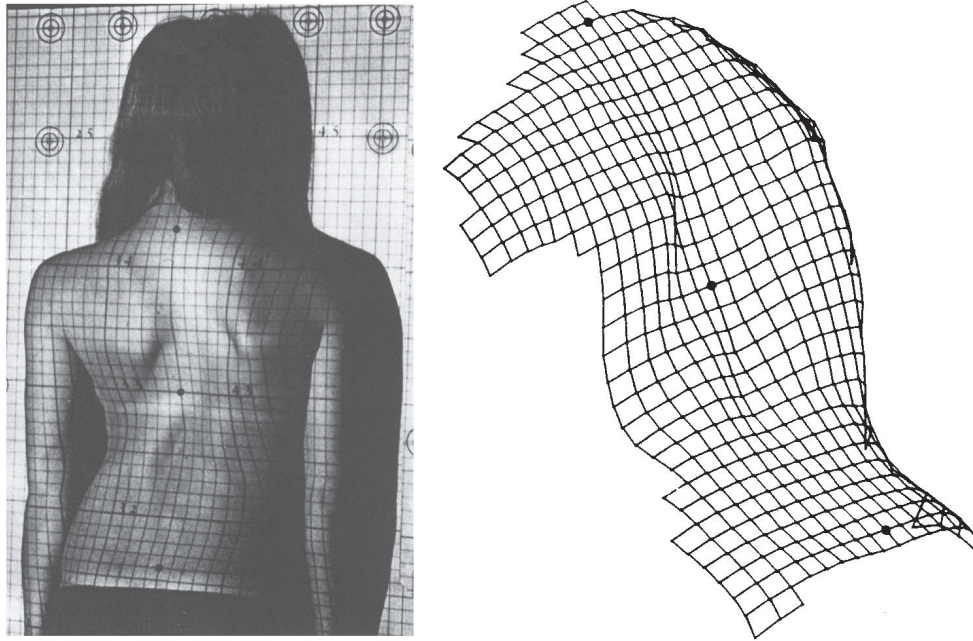


Abbildung 4.7: Die Aufnahme einer Rückenoberfläche und deren dreidimensionale Rekonstruktion mittels Rasterstereographie [4].

Dazu werden ähnlich wie bei der Vermessung der Erdkugel differentialgeometrische Methoden angewandt. Die Übergangsformen zwischen diesen Wülsten und Rinnen können zum Beispiel durch unterschiedliche Farben objektiv dargestellt werden (vergleiche Abbildung 4.8).

4.3.2 Geometrie des Projektionsgitters

Herzstück einer Kamera ist das Objektiv, bestehend aus einem Linsensystem, das das Bild eines Gegenstandes auf den Film projiziert. Mit Hilfe einfacher Triangulation läßt sich das Prinzip der Rasterstereographie mathematisch beschreiben. Im folgenden wird angenommen, daß sich das Objekt weit genug entfernt von der Kamera befindet, so daß dessen Bild in der Brennebene der Kamera entsteht. Der optische Mittelpunkt des Objektivs stelle den Ursprung eines dreidimensionalen Koordinatensystems dar (siehe Abbildung 4.9).

Auf der x -Achse dieses Koordinatensystems befinde sich im Abstand d zum Ursprung eine Lichtquelle im Punkt $L(d/0/0)$, die einen Lichtstrahl auf den Punkt $P(x_0/y_0/z_0)$ einer Fläche projiziert. Die Verbindungslinie zwischen diesem Punkt P und dem Ursprung O schneidet die Brennebene vor der Kamera im Punkt $B(\lambda_0, \mu_0)$. Der Ursprung des zweidimensionalen Koordinatensystems in der Brennebene sei bei $O_f(0/0/f)$. Aufgrund des Strahlensatzes lassen sich dann folgende Verhältnisse herleiten:

$$\frac{x_0}{\lambda_0} = \frac{y_0}{\mu_0} = \frac{z_0}{f} \quad \Rightarrow \quad z_0 = \frac{x_0}{\lambda_0} \cdot f \quad .$$



Abbildung 4.8: Die Rückenoberfläche als farbige Krümmungskarte [13].

Für den Winkel α , zwischen der orthogonalen Projektion des Lichtstrahls in die x - z -Ebene und der x -Achse, gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{z_0}{d - x_0} \quad .$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen läßt sich die Lage im Raum des Flächenpunktes P aufgrund der Koordinaten des Bildpunktes B einfach berechnen, wenn der Abstand d , der Winkel α und die Brennweite f bekannt sind:

$$x_0 = \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot \lambda_0}{f + \lambda_0 \cdot \tan(\alpha)} \quad y_0 = \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot \mu_0}{f + \lambda_0 \cdot \tan(\alpha)} \quad z_0 = \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot f}{f + \lambda_0 \cdot \tan(\alpha)} \quad .$$

Man beachte, daß der Winkel β , also der Winkel zwischen Lichtstrahl und seiner Projektion in die x - z -Ebene, keine Rolle bei der Berechnung des Punktes P spielt. Der Nenner in obigen Gleichungen ist natürlich immer ungleich Null, da keine Punkte im „Unendlichen“ beobachtet werden.

Bei der Projektion eines Gitters werden die Gitterlinien unter verschiedenen Winkeln auf die Oberfläche geworfen. Wenn jedoch der Winkel α einer Gitterlinie und die Winkeldifferenz zu den anderen Linien bekannt ist, dann lassen sich die Informationen der Fläche wiederum einfach aus dem Bild gewinnen. Zur Orientierung könnten sich zum Beispiel die horizontale und die vertikale „Mittellinie“ durch eine stärkere Linienbreite von den anderen unterscheiden.

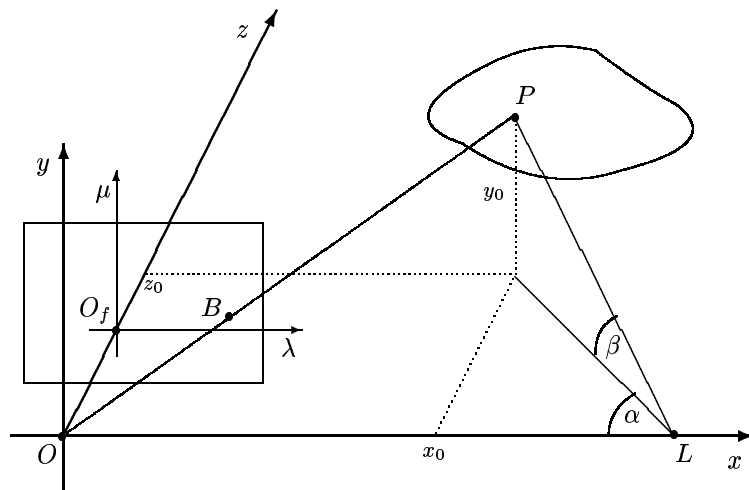


Abbildung 4.9: Geometrie eines projizierten Lichtstrahls.

4.3.3 Rekonstruktion der Oberfläche

Bildanalyse

Jeder Oberflächenpunkt lässt sich aufgrund der Koordinaten seines Bildpunktes eindeutig berechnen. Es liegen jedoch nicht alle Bildpunkte vor, sondern es werden nur diskrete Werte der Aufnahme abgetastet. Diese diskreten Werte müssen interpoliert werden, um die verzerrten Gitterlinien in der Bildebene in Form von stetigen Funktionen darzustellen. Dazu könnten zum Beispiel eindimensionale kubische Splinefunktionen benutzt werden, da diese zum einen zweimal stetig differenzierbar sind und zum anderen die Gitterlinien bei hinreichend vielen Knotenpunkten schön darstellen [9].

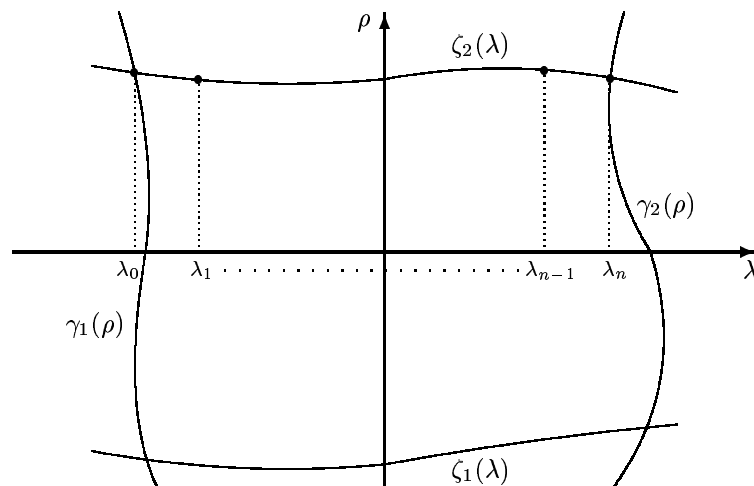


Abbildung 4.10: Interpolation der verzerrten Gitterlinien.

Jede Linie einer „Masche“ des Gitternetzes kann mit Hilfe einer Splinefunktion modelliert werden (siehe Abbildung 4.10).

Die Funktion ζ_2 mit der Knotenmenge $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n\}$ stellt sich wie folgt dar:

$$\zeta_2(\lambda) = p_1(\lambda) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \cdot (\lambda - \lambda_j)_+^3 \quad \lambda \in [\lambda_0, \lambda_n] \quad .$$

Sowohl das Anfangspolynom p_1 als auch die Koeffizienten c_j sind so bestimmt, daß die Funktion an allen Knoten C^2 -stetig ist. Für die sogenannten abgeschnittenen Potenzen gilt:

$$(\lambda - \lambda_j)_+^3 = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda < \lambda_j \\ (\lambda - \lambda_j)^3 & \text{für } \lambda \geq \lambda_j \end{cases} .$$

Durch eine einfache Upparametrisierung kann die Funktion ζ_2 über dem Intervall $[0, 1]$ definiert werden:

$$\zeta_2(\mu) = \hat{p}_1(\mu) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \cdot (\lambda_0 + \mu \cdot [\lambda_n - \lambda_0] - \lambda_j)_+^3 \quad \mu \in [0, 1] \quad .$$

In gleicher Weise lassen sich die anderen Gitterlinien der „Masche“ darstellen:

$$\begin{aligned} \zeta_1(\mu) &= \hat{p}_2(\mu) + \sum_{j=1}^{m-1} c_j \cdot (\tilde{\lambda}_0 + \mu \cdot [\tilde{\lambda}_m - \tilde{\lambda}_0] - \tilde{\lambda}_j)_+^3 \quad \mu \in [0, 1] \\ \gamma_1(\nu) &= \hat{q}_1(\nu) + \sum_{j=1}^{k-1} c_j \cdot (\rho_0 + \nu \cdot [\rho_k - \rho_0] - \rho_j)_+^3 \quad \nu \in [0, 1] \\ \gamma_2(\nu) &= \hat{q}_2(\nu) + \sum_{j=1}^{l-1} c_j \cdot (\tilde{\rho}_0 + \nu \cdot [\tilde{\rho}_l - \tilde{\rho}_0] - \tilde{\rho}_j)_+^3 \quad \nu \in [0, 1] \quad . \end{aligned}$$

Man beachte, daß sich die Knotenmengen sowohl auf der λ -Achse als auch auf der ρ -Achse durch die Anzahl und die Lage der Knoten unterscheiden können.

Jeder Flächenpunkt ist aufgrund der Koordinaten seines Bildpunktes klar bestimmt. Damit läßt sich die „Masche“ auf der beobachteten Fläche in Form von vier Raumkurven rekonstruieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1(\mu) &= \begin{pmatrix} \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot \mu}{f + \mu \cdot \tan(\alpha)} \\ \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot \zeta_1(\mu)}{f + \mu \cdot \tan(\alpha)} \\ \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot f}{f + \mu \cdot \tan(\alpha)} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_2(\mu) &= \begin{pmatrix} \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot \mu}{f + \mu \cdot \tan(\alpha)} \\ \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot \zeta_2(\mu)}{f + \mu \cdot \tan(\alpha)} \\ \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot f}{f + \mu \cdot \tan(\alpha)} \end{pmatrix} \quad \mu \in [0, 1] \\ \mathbf{d}_1(\nu) &= \begin{pmatrix} \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot \gamma_1(\nu)}{f + \gamma_1(\nu) \cdot \tan(\alpha)} \\ \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot \nu}{f + \gamma_1(\nu) \cdot \tan(\alpha)} \\ \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot f}{f + \gamma_1(\nu) \cdot \tan(\alpha)} \end{pmatrix} & \mathbf{d}_2(\nu) &= \begin{pmatrix} \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot \gamma_2(\nu)}{f + \gamma_2(\nu) \cdot \tan(\alpha)} \\ \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot \nu}{f + \gamma_2(\nu) \cdot \tan(\alpha)} \\ \frac{\tan(\alpha) \cdot d \cdot f}{f + \gamma_2(\nu) \cdot \tan(\alpha)} \end{pmatrix} \quad \nu \in [0, 1] \quad . \end{aligned}$$

Der Winkel α wird bei jeder dieser Kurven als konstant betrachtet, denn die Winkeldifferenz zwischen zwei benachbarten Projektionslinien ist sehr gering.

4.3.4 Flächendarstellung durch Coonspflaster

Es ist relativ leicht eine Fläche zu bestimmen, die zwei über demselben Parameterintervall $\mu \in [0, 1]$ definierte, gegenüberliegende Raumkurven \mathbf{c}_1 und \mathbf{c}_2 interpoliert.

Ein Flächenstück r_c verbindet für jeden Wert μ_0 die Raumpunkte $\mathbf{c}_1(\mu_0)$ und $\mathbf{c}_2(\mu_0)$ mit einer Strecke:

$$r_c(\mu, \nu) = (1 - \nu) \cdot \mathbf{c}_1(\mu) + \nu \cdot \mathbf{c}_2(\mu) \quad \nu \in [0, 1] \quad ,$$

wobei gilt:

$$r_c(\mu, 0) = \mathbf{c}_1(\mu) \quad \text{und} \quad r_c(\mu, 1) = \mathbf{c}_2(\mu) \quad .$$

Ein weiteres Flächenstück r_d verbindet die Punkte der Raumkurven \mathbf{d}_1 und \mathbf{d}_2 ebenfalls linear:

$$r_d(\mu, \nu) = (1 - \mu) \cdot \mathbf{d}_1(\nu) + \mu \cdot \mathbf{d}_2(\nu) \quad \mu \in [0, 1] \quad ,$$

wobei analog gilt:

$$r_d(0, \nu) = \mathbf{d}_1(\nu) \quad \text{und} \quad r_d(1, \nu) = \mathbf{d}_2(\nu) \quad .$$

Die Regelflächen r_c und r_d interpolieren jeweils die ihnen zugrundeliegenden Raumkurven, aber die anderen beiden nicht. Daher beschreiben die Funktionen r_c und r_d unterschiedliche Flächen, da sich die Verbindungsgeraden der Randkurven im allgemeinen nicht schneiden. Um eine einzige Flächendarstellung zu erreichen, müssen sie daher noch geeignet korrigiert werden.

In der Ebene $\mu = 0$ muß die Fläche r_c um

$$d_1(\nu) - [(1 - \nu) \cdot c_1(0) - \nu \cdot c_2(0)]$$

und in der Ebene $\mu = 1$ um

$$d_2(\nu) - [(1 - \nu) \cdot c_1(1) - \nu \cdot c_2(1)]$$

korrigiert werden.

Analog muß die Fläche r_d in der Ebene $\nu = 0$ um

$$c_1(\mu) - [(1 - \mu) \cdot d_1(0) - \mu \cdot d_2(0)]$$

und in der Ebene $\nu = 1$ um

$$c_2(\mu) - [(1 - \mu) \cdot d_1(1) - \mu \cdot d_2(1)]$$

angepaßt werden.

Nun muß diese Korrektur aber nicht nur an den Rändern der Flächen, sondern längs aller Geraden sowohl von r_c als auch von r_d erfolgen. Diese beiden Regelflächen stimmen an den Eckpunkten überein und die „Interpolationsdefekte“ werden beschrieben mit Hilfe der Fläche r_{cd} , definiert durch

$$\begin{aligned} r_{cd}(\mu, \nu) &= \begin{pmatrix} 1 - \mu & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_c(0, 0) & r_c(0, 1) \\ r_c(1, 0) & r_c(1, 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \nu \\ \nu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \mu & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_d(0, 0) & r_d(0, 1) \\ r_d(1, 0) & r_d(1, 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \nu \\ \nu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \mu & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1(0) & c_2(0) \\ c_1(1) & c_2(1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \nu \\ \nu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \mu & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1(0) & d_2(0) \\ d_1(1) & d_2(1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \nu \\ \nu \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Durch die Vorschrift

$$\mathbf{X} = r_c + r_d - r_{cd}$$

wird ein sogenanntes Coonspflaster erzeugt [3], welches alle vier Randkurven interpoliert. Dieses Coonspflaster läßt sich in Matrizenschreibweise sehr schön darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mu, \nu) = & \begin{pmatrix} 1-\mu & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1(\nu) \\ d_2(\nu) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} c_1(\mu) & c_2(\mu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-\nu \\ \nu \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} 1-\mu & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}(0,0) & \mathbf{X}(0,1) \\ \mathbf{X}(1,0) & \mathbf{X}(1,1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-\nu \\ \nu \end{pmatrix} \quad , \end{aligned}$$

wobei gilt:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}(0,0) & \mathbf{X}(0,1) \\ \mathbf{X}(1,0) & \mathbf{X}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(0) & c_2(0) \\ c_1(1) & c_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1(0) & d_2(0) \\ d_1(1) & d_2(1) \end{pmatrix} \quad .$$

Die Funktionen $1-\mu$, μ , $1-\nu$ und ν werden Bindefunktionen genannt. Man kann auch andere Paare von Bindefunktionen f_1 , f_2 , g_1 und g_2 verwenden, um die vier Randkurven durch eine Fläche zu interpolieren. Diese würde dann die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mu, \nu) = & \begin{pmatrix} f_1(\mu) & f_2(\mu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1(\nu) \\ d_2(\nu) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} c_1(\mu) & c_2(\mu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1(\nu) \\ g_2(\nu) \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} f_1(\mu) & f_2(\mu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}(0,0) & \mathbf{X}(0,1) \\ \mathbf{X}(1,0) & \mathbf{X}(1,1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1(\nu) \\ g_2(\nu) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

besitzen.

Jedoch müssen diese Funktionenpaare zwei Bedingungen erfüllen: Zum einen muß sich jedes Paar zu 1 summieren, damit eine baryzentrische Kombination von Punkten vorliegt, das heißt:

$$f_1 + f_2 \equiv 1 \quad \text{und} \quad g_1 + g_2 \equiv 1 \quad .$$

Zum anderen muß gelten

$$f_1(0) = g_1(0) = 1 \quad \text{und} \quad f_1(1) = g_1(1) = 0 \quad ,$$

damit das Coonspflaster alle vier Randkurven auch wirklich interpoliert [3].

Die Gestalt der Bindefunktionen beeinflußt die Gestalt des entstehenden Coonspflaster auf naheliegende Weise [6]. Das Pflaster mit linearen Bindefunktionen hat einen großen Nachteil: Zwei solche erzeugte Flächen mit gemeinsamer Randkurve lassen sich zwar stetig zusammensetzen, gehen aber in der Regel nicht stetig differenzierbar ineinander über. Denn die Ableitungen quer zu einer Randkurve hängen von der gegenüberliegenden Randkurve ab.

Um dies zu vermeiden, wählt man einfach Bindefunktionen, deren Steigung am Anfangs- und Endpunkt verschwindet. Wenn verlangt wird, daß die zusammengesetzten Flächen sogar zweimal stetig differenzierbar sein sollen, dann müssen sowohl die erste als auch die zweite Ableitung an den Intervallsgrenzen verschwinden.

Ein Paar von Bidefunktionen, das diese Forderungen erfüllt, sind die Polynome

$$b_1(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3 \quad \text{und} \quad b_2(t) = 1 - (6t^5 - 15t^4 + 10t^3) \quad ,$$

denn diese zwei Funktionen summieren sich zum einen zu 1 und darüber hinaus gilt:

$$b_1(0) = 0, \quad b_1(1) = 1, \quad \dot{b}_1(0) = \dot{b}_1(1) = 0, \quad \ddot{b}_1(0) = \ddot{b}_1(1) = 0 \quad .$$

Werden in der allgemeinen Form des Coonspflasters für beide Paare der Bidefunktionen diese Polynome benutzt:

$$f_1(\mu) = b_1(\mu), \quad f_2(\mu) = b_2(\mu) \quad \text{und} \quad g_1(\nu) = b_1(\nu), \quad g_2(\nu) = b_2(\nu) \quad ,$$

dann ist jedes Pflaster im Innern C^2 -stetig und es kann an jedem Punkt die Gauß'sche Krümmung

$$K = \frac{L \cdot N - M^2}{E \cdot G - F^2}$$

bestimmt werden. In der Regel gehen die Coonspflaster nicht C^2 -stetig ineinander über, dennoch können diese Unstetigkeiten der Ableitungen an den Gitterlinien vernachlässigt werden. Die Krümmung kann beliebig nahe dieser Linien, die der Form der Rückenoberfläche folgen, berechnet werden. Da die Rückenoberfläche eine glatte Form aufweist, sind dort keine großen Krümmungssprünge zu erwarten, was sich auch im Abschnitt 5.4.2 bestätigen wird. Einen größeren Aufwand lohnt sich hier nicht, denn die Abweichungen sind sehr gering. Im Vergleich dazu haben die in der Praxis unvermeidbaren Fehler bei Ermittlung der Rückendaten einen stärkeren Einfluß auf die Ergebnisse.

Diese Gauß'sche Krümmung kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Die Werte lassen sich jedoch auf ein Intervall einschränken, da das Ausmaß der Krümmung auf der Rückenoberfläche beschränkt ist. Dieses Intervall kann mit einer Farbskala belegt werden, um somit eine farbige Krümmungskarte zu erhalten.

An den Übergängen zwischen dem Oberkörper und der dahinterliegenden Wand werden in der Regel Unstetigkeiten bei den projizierten Gitterlinien festzustellen sein. Dies ist jedoch irrelevant, da hauptsächlich der Bereich links und rechts nahe der Wirbelsäule von Interesse ist.

Literatur zu Kapitel 4

- [1] I. V. Adair/M. C. Van Wijk/G. W. D. Armstrong: Moiré topography in scoliosis screening. *Clinical orthopaedics* **129** (1977).
- [2] Drerup Burkhard/Frobin Wolfgang/Hierholzer Eberhard: Oberflächenvermessung bei Wirbelsäulendeformitäten. *Mitteilungen aus der Abteilung Biomechanik/Orthopädische Universitätsklinik Münster* **8** (1982).
- [3] Farin Gerald. *Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design*. Vieweg Verlag, Braunschweig 1994.
- [4] Frobin Wolfgang/Hierholzer Eberhard: Analysis of human back shape using surface curvatures. *Journal of biomechanics*. **15** (1982).
- [5] Hierholzer Eberhard. *Objektive Analyse der Rückenform von Skoliosepatienten*. Gustav Fischer Verlag, Stuttgart 1993.
- [6] Hoschek Josef/Lasser Dieter. *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner Verlag, Stuttgart 1992.

- [7] Neugebauer Hermann/Windischbauer Gerhard. *Surface topography and body deformity*. Gustav Fischer Verlag, Stuttgart 1990.
- [8] A. Shinoto/Y. Ohtsuka/S. Inoue/M. Idesawa/T. Yatagai: Quantitative analysis of scoliosis and kyphosis deformity by moiré method. *Moiré fringe topography and spinal deformity* (Moreland et al.). Pergamon Press, New York 1981.
- [9] Stoer Josef. *Numerische Mathematik 1*. Springer-Verlag, Heidelberg 1993.
- [10] H. Takasaki: Moiré topography. *Applied optics* **9** (1970).
- [11] A. R. Turner-Smith/Rosalind J. Jefferson: Analysis and presentation of human back shape in scoliosis. *IMA Conference on the mathematics of surfaces* (D. C. Handscomb). Keble College, Oxford 1988.
- [12] A. R. Turner-Smith: A television/computer three-dimensional surface shape measurement system. *Journal of biomechanics* **21** (1988).
- [13] H. R. Weiß: Über den Wert von Oberflächenvermessungsverfahren in der Verlaufskontrolle von Wirbelsäulendeformitäten. *Orthopädie-Technik* **1** (1999).

Kapitel 5

Untersuchung eines Modellrückens

Die Wirbelsäule besteht aus insgesamt 34 Wirbeln. Sie setzt sich zusammen aus 7 Halswirbeln, 12 Brustwirbeln, 5 Lendenwirbeln sowie den verwachsenen 5 Kreuzbein- und 5 Steißbeinwirbeln.

Eine Verkrümmung des Rückgrats erfolgt in der Regel zwischen dem siebten Halswirbel und dem Kreuzbein. Jeder der siebzehn Wirbel dazwischen kann also aus der Lotlinie ausbrechen und eine Rotation erfahren. Hinsichtlich einer Diagnose ist daher die nähere Umgebung links und rechts der Wirbelsäule zwischen dem vertebra prominens und dem sacrum von besonderem Interesse.

Um die Güte der drei Verfahren (Moiré-Topographie, Rasterstereographie und ISIS) vergleichen zu können, soll eine mathematisch modellierte Rückenoberfläche in diesem Bereich untersucht werden.

5.1 Darstellung des Rückens

5.1.1 Funktionale Beschreibung

Zur mathematischen Beschreibung eines jeden Modells wird ein virtuelles Koordinatenkreuz benötigt, welches hier seinen Ursprung im letzten Lendenwirbel oberhalb des Kreuzbeines hat. Die x -Achse sei die Waagrechte, die y -Achse stelle die nach oben orientierte Lotlinie dar und die Höhen sollen auf der z -Achse, die in Richtung des Betrachters zeigt, abgetragen werden.

Die vertikale Ausdehnung der Rückenpartie zwischen dem siebten Halswirbel und dem Kreuzbein betrage 40 cm. Die Darstellung der Flächen in diesem Bereich nahe der Wirbelsäule soll über 11 Querschnitte – in gleichmäßigem Abstand von 4 cm – erfolgen, die dann mit Hilfe geeigneter Funktionen interpoliert werden. Jeder Querschnitt wird mit Hilfe einer kubischen Splinefunktion beschrieben, der 5 Punkte zugrunde liegen: 1 Mittelpunkt, 2 äußere und 2 innere Kontrollpunkte (siehe Abbildung 5.1).

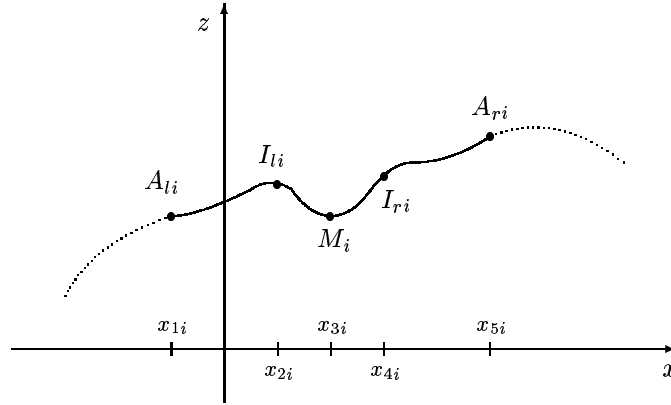


Abbildung 5.1: Querschnitt nahe der Wirbelsäule.

Der Mittelpunkt des i -ten Querschnitts

$$M_i(x_{3i}, y_i, z_{3i})$$

liegt genau in der „Mulde“, die den Verlauf der Wirbelsäule kennzeichnet. Die inneren Kontrollpunkte

$$I_{li}(x_{2i}, y_i, z_{2i}) \quad \text{und} \quad I_{ri}(x_{4i}, y_i, z_{4i})$$

befinden sich in unmittelbarer Nähe links und rechts des Mittelpunktes; diese bilden den Rand der „Mulde“. In größerer Entfernung zum Punkt M_i deuten die äußeren Kontrollpunkte

$$A_{li}(x_{1i}, y_i, z_{1i}) \quad \text{und} \quad A_{ri}(x_{5i}, y_i, z_{5i})$$

den weiteren Verlauf des Querschnitts an. Diese Punkte lassen Rückschlüsse auf das Ausmaß der Rotation des nächstliegenden Wirbels zu. Je stärker der Wirbel rotiert ist, umso größer ist der Betrag des Winkels θ_i , der mit den Punkten A_{li} und A_{ri} in folgendem Zusammenhang steht (vergleiche Abschnitt 4.2.2):

$$\tan(\theta_i) = \frac{z_{5i} - z_{1i}}{x_{5i} - x_{1i}} \quad .$$

Der i -te Querschnitt kann dann mit Hilfe einer Splinefunktion durch die obigen 5 Kontrollpunkte

$$q_i(x) = p_{i0}(x) + \sum_{j=2}^4 c_j \cdot (x - x_{ji})_+^3 \quad x \in [x_{1i}, x_{5i}]$$

mit dem Anfangspolynom p_{i0} und geeigneten Koeffizienten c_j modelliert werden.

Die Werte x_{ji} ($j = 1, \dots, 5$) variieren in der Regel für jede Funktion q_i . Jedoch können durch einfache Parametertransformationen

$$x = x(u) = x_{1i} + u \cdot (x_{5i} - x_{1i}) \quad u \in [0, 1]$$

alle diese Funktionen über dem Intervall $[0, 1]$ definiert werden:

$$q_i(u) = \hat{p}_{i0}(u) + \sum_{j=2}^4 c_j (x_{1i} + u \cdot (x_{5i} - x_{1i}) - x_j)_+^3 \quad ,$$

was sich hinsichtlich weiterer Betrachtungen als praktisch erweist.

5.1.2 Lage und Form

Da sich die 11 Querschnitte auf einer Länge von 40 cm verteilen, haben sie den konstanten Abstand von 4 cm zueinander. Das bedeutet für die 2. Koordinate aller Kontrollpunkte:

$$y_i = (i - 1) \cdot 4 \quad , \quad i = 1, \dots, 11 \quad .$$

Die inneren Kontrollpunkte seien 2 cm von dem jeweiligen Mittelpunkt M_i entfernt, das heißt:

$$x_{2i} = x_{3i} - 2 \quad \text{und} \quad x_{4i} = x_{3i} + 2 \quad ;$$

und die äußeren Kontrollpunkte haben einen horizontalen Abstand von 10 cm zur Mitte:

$$x_{1i} = x_{3i} - 10 \quad \text{und} \quad x_{5i} = x_{3i} + 10 \quad .$$

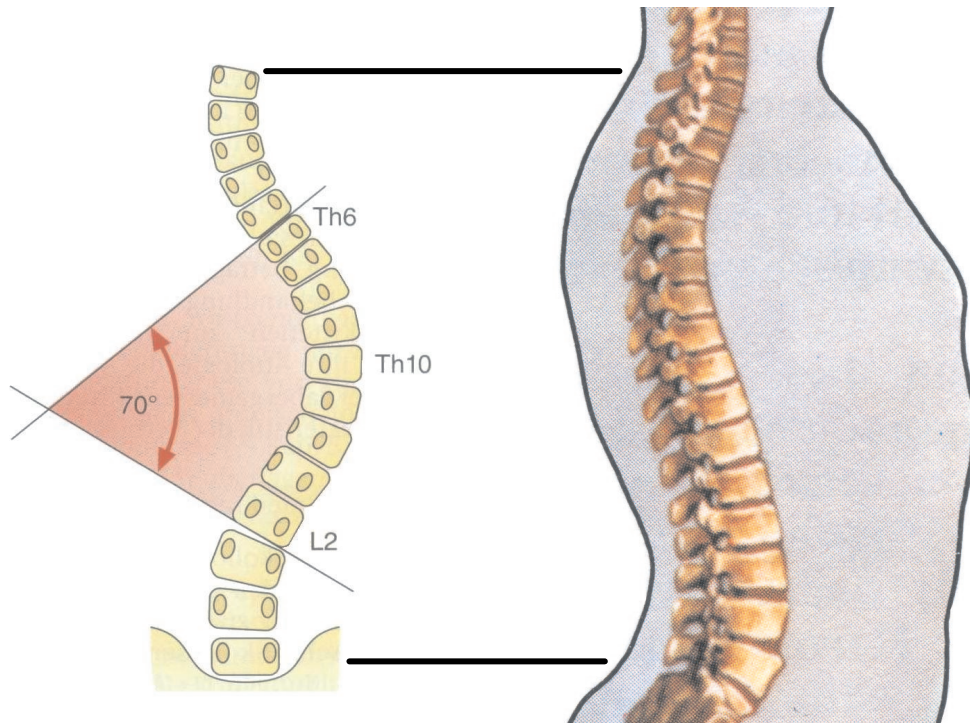


Abbildung 5.2: Der Verlauf der Wirbelsäule im Modell des virtuellen Rückens [1], [2].

Sowohl die x -Werte der Mittelpunkte als auch die z -Werte aller Kontrollpunkte wurden anhand der Abbildung 5.2 ermittelt und sind in Tabelle 5.1 aufgelistet. Dabei spiegeln die Punkte M_i den Verlauf der Wirbelsäule wider. Es wurde versucht die Werte für diese Punkte maßstabsgetreu aus dieser Abbildung zu entnehmen.

Je stärker ein Wirbel die Lotlinie verläßt, umso stärker ist er rotiert. Bei dieser Drehung entstehen aufgrund der mitgenommen Rippen Höhenunterschiede der inneren und vor allem der äußeren Kontrollpunkte zu den „Muldenpunkten“ entlang der Wirbelsäule. Diese geschätzten Unterschiede sind ebenfalls in Tabelle 5.1 aufgeführt.

Somit lassen sich die Splinefunktionen der Querschnitte leicht bestimmen. Diese sind in Abbildung 5.3 dargestellt, aus der sich ohne Mühe die Hauptkrümmung und die beiden daraus resultierenden Gegenkrümmungen erkennen lassen.

i	x_{3i}	z_{1i}	z_{2i}	z_{3i}	z_{4i}	z_{5i}	$\tan(\theta_i)$	θ_i
1	0	20	10	0	10	20	0	0°
2	0	2	-8	-18	-8	2	0	0°
3	8	-6	-14	-24	-14	-1	0,025	$1,4^\circ$
4	24	4	1	-8	5	27	0,115	$6,6^\circ$
5	44	10	15	10	27	60	0,25	$14,0^\circ$
6	44	18	24	20	38	71	0,265	$14,8^\circ$
7	48	25	31	30	51	85	0,3	$16,7^\circ$
8	32	44	41	34	49	74	0,25	$14,0^\circ$
9	8	46	38	28	38	51	0,025	$1,4^\circ$
10	-10	37	23	12	21	28	-0,045	$-2,6^\circ$
11	-8	11	-2	-12	-2	6	-0,025	$-1,4^\circ$

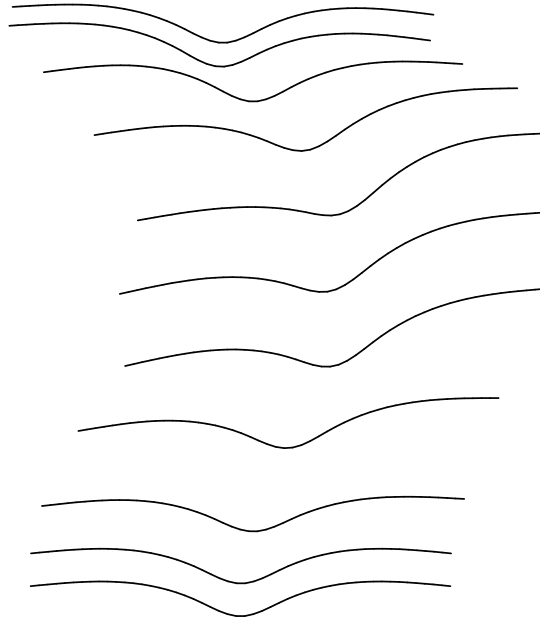
 Tabelle 5.1: Geschätzte Werte für die Kontrollpunkte (in $[mm]$).


Abbildung 5.3: Querschnitte mit erkennbarer Rotation.

5.1.3 Die Fläche zwischen den Querschnitten

Die Funktionen

$$f_i(u) = \begin{pmatrix} x_i(u) \\ y_i \\ q_i(u) \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, 11$$

mit

$$x_i(u) = x_{1i} + u(x_{5i} - x_{1i})$$

bilden sich paarweise gegenüberliegende Raumkurven. Mit Hilfe von Regelflächen ließen sich zwei solcher Raumkurven auf einfachste Weise interpolieren. Damit die gesamte Flächendarstellung des relevanten Rückenbereichs C^2 -stetig ist, würden sich wiederum

$$b_1(t) = 1 - (6t^5 - 15t^4 + 10t^3) \quad \text{und} \quad b_2(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3$$

als Bindefunktionen gut eignen (siehe Seite 63).

Jedoch wäre diese Flächendarstellung nicht realistisch, da die ersten beiden Ableitungen dieser Funktionen an den Intervallgrenzen (bei $v = 0$ und $v = 1$) verschwinden, was ein Abflachen der Fläche an jedem Querschnitt zur Folge hätte.

Um eine realistische Darstellung der gesamten Fläche zu bekommen, bietet sich eine Schar von Raumkurven f_u an, die für jedes $u_0 \in [0, 1]$ alle Punkte $P_j(x_j(u_0)/y_j/q_j(u_0))$ komponentenweise mit kubischen Splinekurven α, β und γ verbindet:

$$f_{u_0}(v) = \begin{pmatrix} \alpha(u_0, v) \\ \beta(u_0, v) \\ \gamma(u_0, v) \end{pmatrix} \quad v \in [0, 40] \quad .$$

Es ist leicht einzusehen, daß die daraus resultierende Fläche

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} \alpha(u, v) \\ \beta(u, v) \\ \gamma(u, v) \end{pmatrix} \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 40]$$

zweimal stetig differenzierbar ist.

Mit Hilfe des Computeralgebraprogramms MAPLE läßt sich zeigen, daß aufgrund der Definition der Funktionen x_i bei α die Koeffizienten aller Potenzen von v rational sind. Die Abhängigkeit von u spiegelt sich lediglich in einem linearen Summanden wider. Bei γ hingegen bestehen aufgrund der Interpolation der Splines q_i sämtliche Koeffizienten der v -Potenzen aus kubischen Polynomen abhängig von u . Da die Werte y_i äquidistant verteilt sind, stellt sich die Splinefunktion β der y -Komponente einfach als linearer Term dar:

$$\beta(u, v) = v \quad .$$

Abbildung 5.4 zeigt die auf diese Weise konstruierte Fläche.

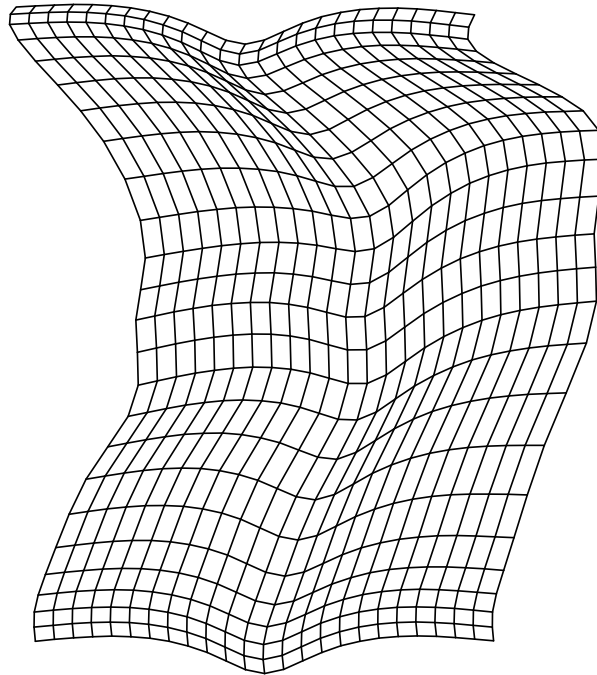


Abbildung 5.4: Darstellung des Modellrückens.

5.2 Empfindlichkeit der Moiré-Topographie

Bei der Untersuchung des Rückens mittels Moiré-Topographie wird ebenfalls ein Gitter auf die Oberfläche projiziert. Jedoch befindet sich dieses beleuchtete Gitter direkt vor der Fläche und besteht aus einem engmaschigen Netz schwarz gefärbter Kunstfasern (vergleiche Abschnitt 3.4).

Der Schatten dieses Netzes bildet auf der Oberfläche ein zweites Gitter. Die Überlagerung der beiden Gitter erzeugt ein wellenartiges Muster, das stark an eine topographische Karte erinnert. Genauso wie bei einer topographischen Karte können auch hier Höhenunterschiede anhand von Linien leicht wahrgenommen werden. Diese Höhenlinien resultieren aus Schnittkurven der virtuellen, zueinander paralleler Ebenen mit der Fläche und charakterisieren diese lokal nach elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Punkten (siehe Seite 21). Die Distanz zwischen solchen virtuellen Ebenen wird auch Konturintervall genannt und kann als konstant angenommen werden, wenn der Abstand der Lichtquelle zum Gitter im Vergleich zu den Höhenunterschieden der Fläche groß genug ist (vergleiche Abschnitt 3.4).

Der Moiré-Effekt zweier sich überlagernder Gitter kann sehr hilfreich sein, um Verformungen von Oberflächen auszuwerten. Um ein Auftreten oder Voranschreiten einer Skoliose zu diagnostizieren, wird bei diesem Verfahren das topographische Bild auf Asymmetrien hin untersucht. Diese Methode ist einfach, schnell und günstig. Jedoch reagieren die Höhenlinien sehr sensibel auf die Positionierung des Patienten zum Gitter. Diese Empfindlichkeit der Moiré-Topographie kann einfach simuliert werden, indem man die Flächenfunktion F mit zwei speziellen Matrizen A und B von links multipliziert:

$$\tilde{F}(u, v, \Phi, \vartheta) = A(\Phi) \cdot B(\vartheta) \cdot F(u, v) \quad ,$$

wobei

$$A(\Phi) = \begin{pmatrix} \cos(\Phi) & 0 & -\sin(\Phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\Phi) & 0 & \cos(\Phi) \end{pmatrix}$$

den virtuellen Rücken nach links ($\Phi > 0$) beziehungsweise nach rechts ($\Phi < 0$) dreht und

$$B(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

ihn nach hinten ($\vartheta > 0$) respektive nach vorne ($\vartheta < 0$) kippt.

Abbildung 5.5 zeigt die Moirémuster für verschiedene Werte von Φ und ϑ . Das Bild genau in der Mitte zeigt das Muster für $\Phi = 0$ und $\vartheta = 0$, also wenn die ursprüngliche Fläche F von hinten durch das Gitter betrachtet wird.

Am meisten hebt sich das Bild links unten von den anderen Mustern ab. Dabei ist der virtuelle Rücken sowohl um $2,5^\circ$ nach links gedreht als auch nach hinten gekippt. Die Mulde entlang der Wirbelsäule besteht aus parabolischen Punkten. Diese lassen sich auch hier zum größten Teil anhand der parabelähnlichen Linien erkennen. Jedoch könnte der Bereich relativ weit oben zwischen den Schulterblättern auch als elliptisch interpretiert werden, da bei allen neun Bildern klar eine Ellipse zu sehen ist. Ebenso sind auch Ellipsen links und rechts der Wirbelsäule im Lendenbereich klar ersichtlich. Auf hyperbolische Punkte auf der Rückenfläche läßt keines der Muster schließen (vergleiche Seite 21).

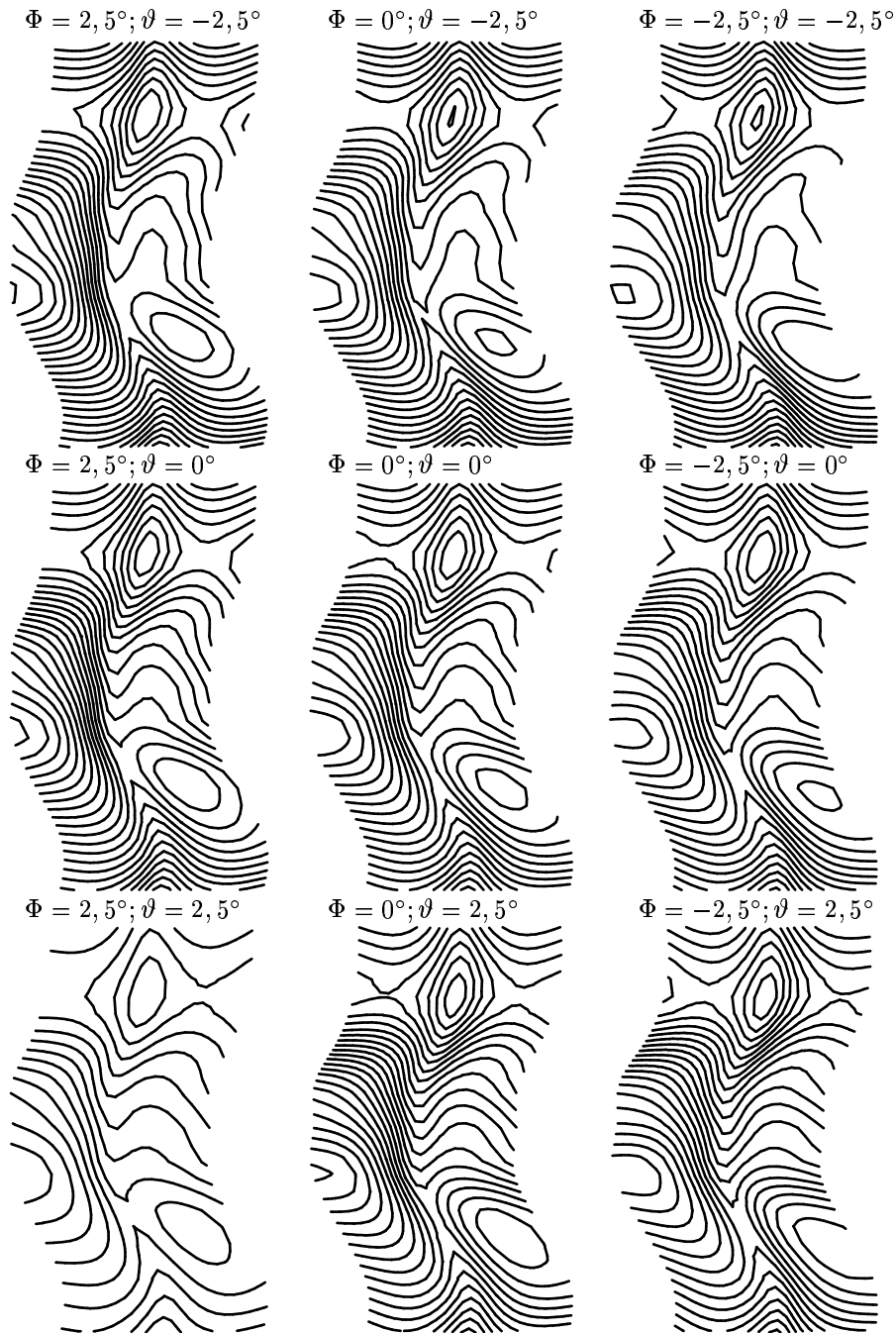


Abbildung 5.5: Eine leichte Veränderung der Lage des Patienten zum Gitter verändert schon das Moirémuster.

5.3 Das modifizierte ISIS-Verfahren angewandt

Das Prinzip des modifizierten ISIS-Verfahrens ist in Abschnitt 4.2.3 beschrieben: Eine dreidimensionale Raumkurve, die dem groben Verlauf der Wirbelsäule folgt, wird auf Stellen mit verschwindender Krümmung untersucht.

$v _{\alpha''(v)=0}$	0,00	13,07	18,47	21,65	30,38	40,00
$v _{\gamma''(v)=0}$	0,00	11,82	18,86	21,61	-	40,00

 Tabelle 5.2: Nullstellen von α'' und γ'' (in [cm]) bei 11 „Muldenpunkten“.

An diesen Stellen werden die Tangentialvektoren ausgewertet, die Rückschlüsse auf das Ausmaß des sogenannten Cobb-Winkels zulassen.

Bezüglich der Konstruktion des virtuellen Rückens folgt die Raumkurve \mathfrak{s} den Mittelpunkten M_i der Querschnitte, das heißt:

$$\mathfrak{s}(v) = f_{\frac{1}{2}}(v) = \begin{pmatrix} \alpha(\frac{1}{2}, v) \\ v \\ \gamma(\frac{1}{2}, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(v) \\ v \\ \gamma(v) \end{pmatrix} \quad v \in [0, 40] \quad ,$$

wobei $\alpha(v) = \alpha(\frac{1}{2}, v)$ und $\gamma(v) = \gamma(\frac{1}{2}, v)$.

Man beachte, daß die so definierte Kurve \mathfrak{s} nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Die Stellen verschwindender Krümmung sind nur bei einer Parametrisierung nach der Bogenlänge gleich den Nullstellen der zweiten Ableitung von \mathfrak{s} . Daher wäre der Ansatz

$$\mathfrak{s}''(v) = \vec{0}$$

zur Bestimmung dieser Stellen a priori nicht korrekt.

Die Krümmung der Kurve \mathfrak{s} läßt sich ausdrücken (vergleiche Seite 17) durch

$$\kappa(v) = \frac{|\mathfrak{s}'(v) \times \mathfrak{s}''(v)|}{|\mathfrak{s}'(v)|^3} \quad ,$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}'(v) \times \mathfrak{s}''(v) &= \begin{pmatrix} \alpha'(v) \\ 1 \\ \gamma'(v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha''(v) \\ 0 \\ \gamma''(v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma''(v) \\ \alpha''(v) \cdot \gamma'(v) - \alpha'(v) \cdot \gamma''(v) \\ -\alpha''(v) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieser Funktion κ stimmen mit den gemeinsamen Nullstellen der Funktionen γ'' und α'' überein, denn:

$$\kappa(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{s}'(v) \times \mathfrak{s}''(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma''(v) = \alpha''(v) = 0 \quad .$$

In diesem Falle verschwindet die Krümmung tatsächlich, wenn gilt: $\mathfrak{s}''(v) = 0$, denn $\beta''(v) = 0$. Jedoch trifft dies nur in diesem Modell zu, denn im allgemeinen wird die zweite Komponente dieses Vektors von Null verschieden sein.

In Tabelle 5.2 sind die Werte der Variablen v aufgelistet, für die die zweiten Ableitungen der Funktion α beziehungsweise γ verschwinden. Die Werte stimmen für $v = 0$, $v = 40$ und in grober Näherung für $v = 21,6$ überein.

In der Regel setzt der Algorithmus zur Berechnung einer Splinekurve \mathfrak{s} über einem Intervall $[a, b]$ die Bedingungen $\mathfrak{s}''(a) = \mathfrak{s}''(b) = 0$ voraus [3].

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\tilde{x}_{3i}	0	0	0	4	8	12	24	36	44	44
\tilde{z}_{3i}	0	-10	-18	-22	-24	-16	-8	0	10	18
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
44	48	48	40	32	16	8	-6	-10	-10	-8
20	24	30	32	34	32	28	22	12	0	-12

 Tabelle 5.3: Geschätzte Werte für \tilde{x}_{3i} und \tilde{z}_{3i} (in $[mm]$).

$v _{\alpha''(v)=0}$	0,00	2,40	5,77	8,38	11,66	17,81
	21,21	25,23	26,59	28,94	31,06	33,00
	40,00					
$v _{\gamma''(v)=0}$	0,00	5,39	6,28	9,60	11,89	15,41
	19,37	22,66	25,37	26,71	37,60	40,00

 Tabelle 5.4: Nullstellen von α'' und γ'' (in $[cm]$) bei 21 „Muldenpunkten“.

Daher sind auch hier die Intervallgrenzen $v = 0$ und $v = 40$ von keinerlei praktischem Interesse. Die Stelle $v = 21,6$ liegt im Bereich des Scheitelwirbels. Die Splinekurve läßt also genau an der größten Seitenabweichung der Wirbelsäule auf einen geradlinigen Verlauf schließen, was unrealistisch ist.

Ein Grund für dieses unerfreuliche Ergebnis könnte die geringe Anzahl von Stützpunkten der Splinefunktionen sein. Wenn die Zerlegung der Rückenpartie in Querschnitte mit nur 2 cm Abstand zueinander verfeinert wird, dann verdoppelt sich fast die Anzahl der zu interpolierenden Muldenpunkte:

$$\tilde{M}_i(\tilde{x}_{3i}, \tilde{y}_i, \tilde{z}_{3i}) \quad \text{mit} \quad \tilde{y}_i = (i-1) \cdot 2 \quad , \quad i = 1, \dots, 21 \quad .$$

Die Werte \tilde{x}_{3i} und \tilde{z}_{3i} sind wieder Schätzungen, die auf Abbildung 5.2 beruhen und in Tabelle 5.3 angegeben sind.

Für diese Punkte \tilde{M}_i gibt es wiederum eine vektorielle Funktion \mathfrak{s} , deren Komponenten α und γ die \tilde{x}_{3i} - beziehungsweise \tilde{z}_{3i} -Werte interpolieren. Tabelle 5.4 zeigt die Stellen, an denen die Krümmung dieser Splines verschwinden.

Außer den Anfangs- und Endpunkten von α und γ liegen nur noch drei Datenpaare jeweils eng beieinander:

$$\begin{aligned} v_1|_{\alpha} &= 11,66 \quad \text{mit} \quad v_1|_{\gamma} = 11,89 \quad ; \\ v_2|_{\alpha} &= 25,23 \quad \text{mit} \quad v_2|_{\gamma} = 25,37 \quad ; \\ v_3|_{\alpha} &= 26,59 \quad \text{mit} \quad v_3|_{\gamma} = 26,71 \quad . \end{aligned}$$

Die y -Koordinaten der beiden Neutralwirbel aus Abbildung 5.2 liegen schätzungsweise im Bereich zwischen $10,95 - 12,05 \, cm$ beziehungsweise $26,80 - 29,90 \, cm$. Das bedeutet, daß die Datenpaare der „realen“ Lage dieser Wirbel schon sehr nahe kommen.

Zum einen stellt sich nun die Frage, ob der α -Wert oder der γ -Wert eines Datenpaares zur Berechnung des Cobbwinkels benutzt wird. Zum anderen, welches Datenpaar den oberen Neutralwirbel lokalisiert.

Da sich die α - und γ -Werte nicht zu sehr unterscheiden, ist es naheliegend einfach das arithmetische Mittel zu bilden:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{v_1|_\alpha + v_1|_\gamma}{2} \approx 11,18 \\ v_2 &= \frac{v_2|_\alpha + v_2|_\gamma}{2} \approx 25,30 \\ v_3 &= \frac{v_3|_\alpha + v_3|_\gamma}{2} \approx 26,65 \quad . \end{aligned}$$

Die Winkelberechnung aufgrund der Werte v_1 mit v_2 beziehungsweise v_1 mit v_3 liefert folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{s}'(v_1) \cdot \mathfrak{s}'(v_2)}{|\mathfrak{s}'(v_1)| \cdot |\mathfrak{s}'(v_2)|} &\approx 0,518 \quad \Rightarrow \quad \theta_I \approx 58,8^\circ \\ \frac{\mathfrak{s}'(v_1) \cdot \mathfrak{s}'(v_3)}{|\mathfrak{s}'(v_1)| \cdot |\mathfrak{s}'(v_3)|} &\approx 0,625 \quad \Rightarrow \quad \theta_{II} \approx 51,3^\circ \quad . \end{aligned}$$

Beide Winkel θ_I und θ_{II} messen keine 70° (vergleiche Abbildung 5.2). Darüber hinaus weicht θ_I noch mehr von diesem vorgegebenen Cobbwinkel ab als θ_{II} , obwohl v_3 näher dem Bereich $26,80 - 29,90 \text{ cm}$ ist als v_2 . Wenn man aber bedenkt, daß die zugrundeliegenden Daten der Muldenpunkte \tilde{M}_i auf grobe Schätzungen beruhen, dann kann man dennoch mit diesen Ergebnissen zufrieden sein. Letztendlich lassen nur klinische Studien an „reellen“ Menschen eine Beurteilung der Güte und Funktionalität dieser Meßmethode zu.

5.4 Güte der Rasterstereographie

Bei der Diagnose einer Skoliose mittels Rasterstereographie wird ein Gitter auf die Rückenoberfläche projiziert, um dann die verzerrte Gitterstruktur mathematisch auszuwerten. Die Fläche wird zum Beispiel mit Hilfe von C^2 -stetigen Coonsplastern dargestellt, so daß an jeder Stelle die Gauß'sche Krümmung bestimmt werden kann.

5.4.1 Approximation der Fläche

Ein Coonspflaster interpoliert vier sich paarweise gegenüberliegende Raumkurven:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mu, \nu) &= \begin{pmatrix} b_1(\mu) & b_2(\mu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1(\nu) \\ d_2(\nu) \end{pmatrix} + \\ &\quad \begin{pmatrix} c_1(\mu) & c_2(\mu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1(\nu) \\ b_2(\nu) \end{pmatrix} - \\ &\quad \begin{pmatrix} b_1(\mu) & b_2(\mu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}(0,0) & \mathbf{X}(0,1) \\ \mathbf{X}(1,0) & \mathbf{X}(1,1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1(\nu) \\ b_2(\nu) \end{pmatrix} \quad , \end{aligned}$$

wobei die Binfunktionen

$$b_1(t) = 1 - (6t^5 - 15t^4 + 10t^3) \quad \text{und} \quad b_2(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3$$

die C^2 -Stetigkeit für alle $(\mu, \nu) \in [0, 1] \times [0, 1]$ wiederum gewährleisten (vergleiche Abschnitt 4.3.4).

Bei der Rasterstereographie ist die Lage der Kamera zum Projektor bekannt, so daß in der Praxis die Kurven c_1, c_2, d_1 und d_2 mittels einfacher Triangulation bestimmt werden können. Wie gut Coonspflaster die dazwischenliegende Fläche approximiert, kann gezeigt werden, wenn genaue Kenntnis über die Lage der Lichtquelle L und des Gitters zu der zu untersuchenden, aber bekannten Fläche F besteht.

Zunächst betrachte man ein einzelnes Gitterkästchen mit den Eckpunkten A, B, C und D . Sowohl die Koordinaten dieser vier Punkte als auch die der Lichtquelle L seien gegeben. Die Vektoren $\vec{m}_1 = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{m}_2 = \overrightarrow{AD}$ stehen senkrecht aufeinander und jeder Punkt $P_{\mu,\nu}$ innerhalb des Kästchens kann als deren Linearkombination dargestellt werden:

$$P_{\mu,\nu} = \vec{a} + \mu\vec{m}_1 + \nu\vec{m}_2 \quad \mu, \nu \in [0, 1] \quad .$$

Der Lichtstrahl durch solch einen Punkt folgt der Geraden

$$g_{\mu,\nu} : \vec{x} = \vec{l} + t\overrightarrow{LP}_{\mu,\nu}$$

bis er auf die virtuelle Rückenfläche F trifft. Die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden $g_{\mu,\nu}$ mit F bekommt man, indem man diese einfach gleichsetzt:

$$\vec{l} + t\overrightarrow{LP}_{\mu,\nu} = F(u, v) \quad .$$

Da die erste und dritte Komponente von F aus kubischen Splinefunktionen besteht, ist dieses Gleichungssystem nicht linear und läßt sich unter Umständen nur schwer lösen. Es ist jedoch leicht einzusehen, daß die Parameter u und v der Fläche F von den Parametern μ und ν des Punktes $P_{\mu,\nu}$ abhängen, das heißt:

$$u = u(\mu, \nu) \quad \text{und} \quad v = v(\mu, \nu) \quad .$$

Diese Zuordnungen sind eineindeutig, da es keinen Flächenpunkt gibt, der auf zwei verschiedenen Geraden $g_{\mu,\nu}$ liegt. Daher läßt sich die Funktion F umparametrisieren:

$$F(u, v) = F(\mu, \nu) \quad ,$$

wobei die Abhängigkeiten $\mu = \mu(u, v)$ und $\nu = \nu(u, v)$ auch sehr komplex sein können.

Somit kann eine Funktion Π_F definiert werden:

$$\begin{aligned} \Pi_F : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P_{\mu,\nu} &\longmapsto F(\mu, \nu) \quad , \end{aligned}$$

die das Bild jeden Punktes aus dem Kästchen auf die Fläche F projiziert.

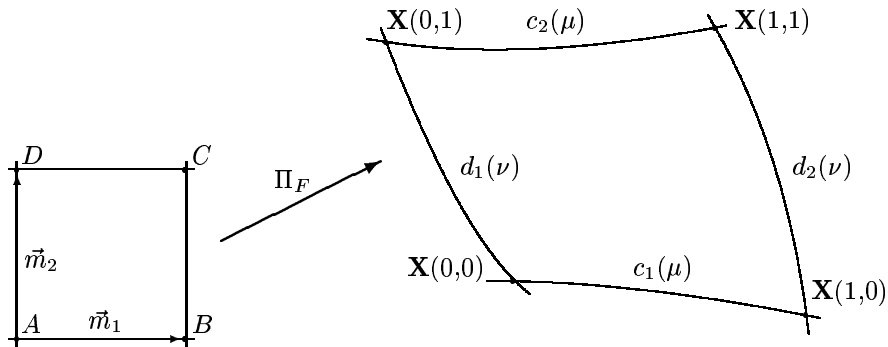
Die Projektionen der Gitterlinien ergeben sich, wenn die Parameter μ und ν die Werte 0 beziehungsweise 1 annehmen:

$$\begin{aligned} \Pi_F(\mu, 0) &= c_1(\mu) \quad ; \quad \Pi_F(\mu, 1) = c_2(\mu) \\ \Pi_F(0, \nu) &= d_1(\nu) \quad ; \quad \Pi_F(1, \nu) = d_2(\nu) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \Pi_F(0, 0) &= \mathbf{X}(0, 0) \quad ; \quad \Pi_F(0, 1) = \mathbf{X}(0, 1) \\ \Pi_F(1, 0) &= \mathbf{X}(1, 0) \quad ; \quad \Pi_F(1, 1) = \mathbf{X}(1, 1) \end{aligned}$$

(siehe Abbildung 5.6).


 Abbildung 5.6: Projektion der Gitterlinien auf die Fläche F .

Der Approximationsfehler Δ an einer Stelle (μ_0, ν_0) wird einfach durch den Betrag der Differenz zwischen dem Punkt auf dem Coonspflaster $\mathbf{X}(\mu_0, \nu_0)$ und dem tatsächlichen Flächenpunkt $\Pi_F(\mu_0, \nu_0)$ berechnet:

$$\Delta(\mu_0, \nu_0) = |\mathbf{X}(\mu_0, \nu_0) - \Pi_F(\mu_0, \nu_0)| \quad .$$

Wie gut diese Coonspflaster die Form und die Eigenschaften der Fläche wiedergeben, soll nun an einem konkreten Beispiel gezeigt werden. Dazu werden die Koordinaten der Lichtquelle L und eines Gitterpunktes A in Bezug auf das Koordinatensystem aus Abschnitt 5.1 in cm angegeben:

$$L(0/20/300) \quad \text{und} \quad A(0/20/290) \quad .$$

Aufgrund der Position des Punktes A ergeben sich auch die Koordinaten aller anderen Gitterpunkte, wenn die Gitterkonstante P bekannt ist. Hier in diesem Beispiel soll $P = 1,3 \text{ mm}$ betragen. Diese wurde so gewählt, so daß ein Netz mit 3 Spalten à 10 Maschen sicher auf die Fläche projiziert werden können. Aufgrund der bezüglich Tabelle 5.1 modellierten rechtskonvexen Skoliose liegt eine Spalte „links“ und zwei Spalten „rechts“ der y -Achse.

Die approximierten und reellen Flächen, die innerhalb dieser 30 Maschen liegen sind in Abbildung 5.7 dargestellt. Der Approximationsfehler beträgt höchstens $4,4 \text{ mm}$, so daß sich die Abbildungen fast nicht unterscheiden. Ebenso wie bei den Abbildungen 5.3 und 5.4 wurden auch die Werte dieser Abbildung mit Hilfe des Computeralgebraprogramms MAPLE berechnet und geplottet (siehe Anhang B.3).

5.4.2 Vergleich der Gauß'schen Krümmungen

Oft werden bei der Rasterstereographie Krümmungskarten erstellt, denn eine grundlegende Eigenschaft einer Fläche ist die Krümmung an jedem Punkt, unabhängig von deren Lage im Raum. Je nach Gestalt der Fläche in der näheren Umgebung eines Punktes kann dieser elliptischer, parabolischer oder auch hyperbolischer Natur sein. Die Art und das Ausmaß dieser Charakteristik wird durch den Wert der Gauß'schen Krümmung angegeben (vergleiche 2.2.4).

Die Gauß'sche Krümmung ist invariant bezüglich der Parametrisierung. Diesen Umstand kann man sich zunutze machen, um nun sowohl die Gauß'sche Krümmung des Coons-

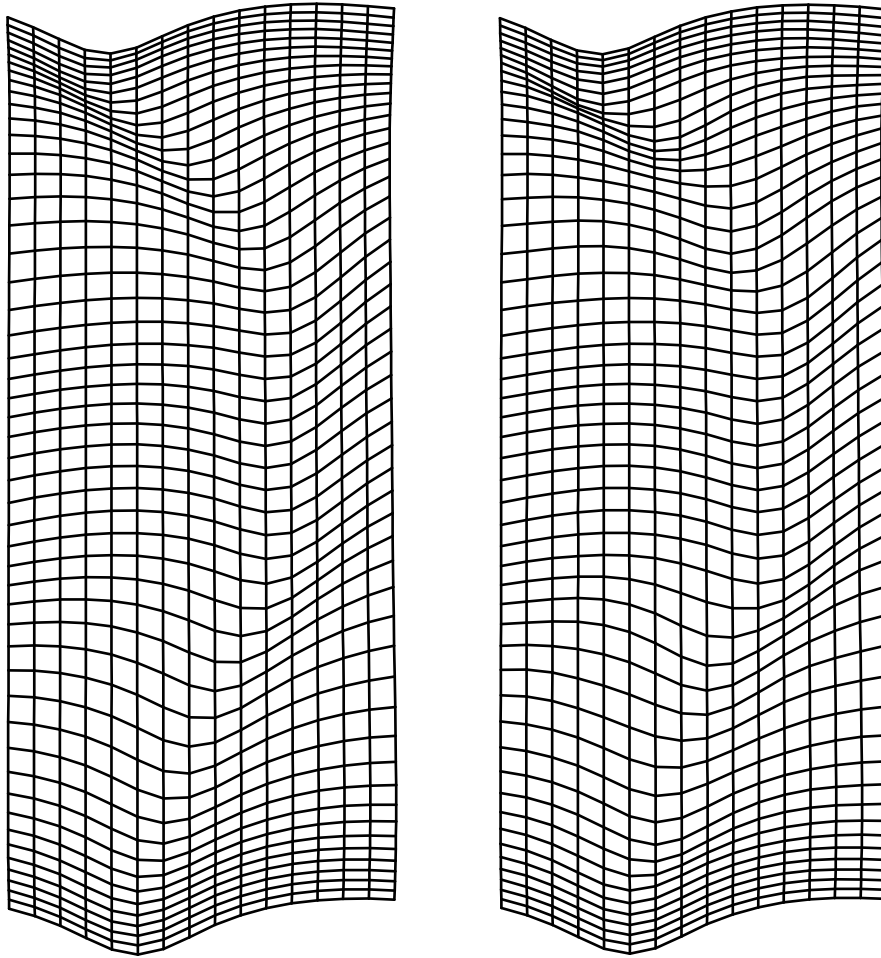


Abbildung 5.7: Einen Unterschied zwischen der reellen Fläche (links) und der approxiierten Fläche (rechts) ist kaum zu erkennen.

pflasters K_C als auch der tatsächlichen Fläche K_F innerhalb einer Masche bezüglich des Parameterpaares (μ, ν) zu bestimmen.

Es gilt:

$$K_C = \frac{L_C N_C - M_C^2}{E_C G_C - F_C^2} \quad ,$$

wobei

$$E_C = \mathbf{X}_\mu^2 \quad , \quad F_C = \mathbf{X}_\mu \mathbf{X}_\nu \quad \text{und} \quad G_C = \mathbf{X}_\nu^2$$

die ersten Fundamentalgrößen sowie

$$L_C = \mathbf{X}_{\mu\mu} \mathfrak{N}_C \quad , \quad M_C = \mathbf{X}_{\mu\nu} \mathfrak{N}_C \quad \text{und} \quad N_C = \mathbf{X}_{\nu\nu} \mathfrak{N}_C$$

mit

$$\mathfrak{N}_C = \frac{\mathbf{X}_\mu \times \mathbf{X}_\nu}{|\mathbf{X}_\mu \times \mathbf{X}_\nu|}$$

die zweiten Fundamentalgrößen des Coonspflasters sind.

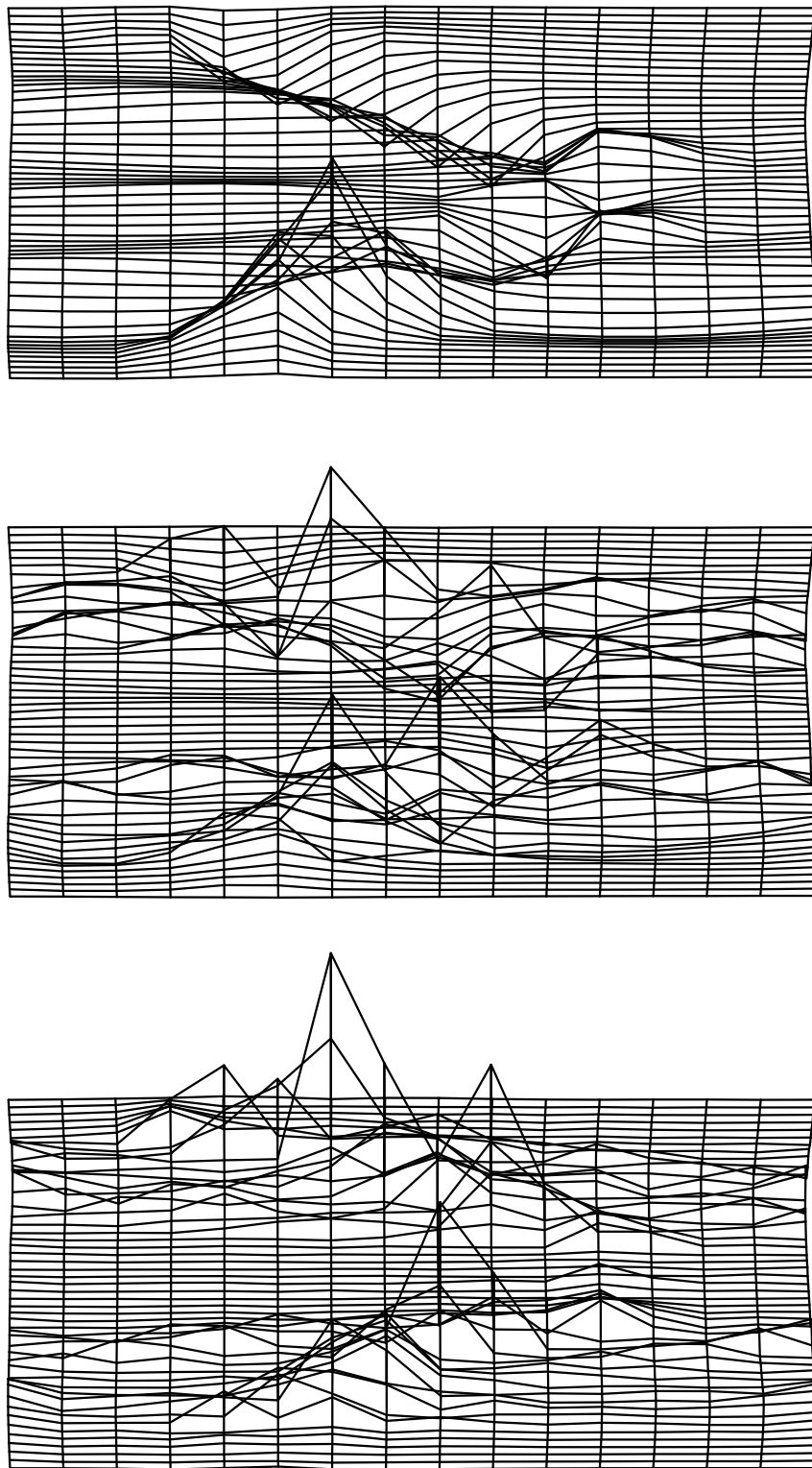


Abbildung 5.8: Gauß'sche Krümmung der reellen Fläche (oben), der approximated Fläche mit Verzerrungen (mittig) und deren Differenz (unten).

Die reale Krümmung K_F dieses Flächenstücks läßt sich mit Hilfe der Funktion Π_F analog berechnen:

$$K_F = \frac{L_F N_F - M_F^2}{E_F G_F - F_F^2} \quad ,$$

mit

$$E_F = \Pi_{F,\mu}^2 \quad , \quad F_F = \Pi_{F,\mu} \Pi_{F,\nu} \quad \text{und} \quad G_F = \Pi_{F,\nu}^2$$

als erste Fundamentalgrößen sowie

$$L_F = \Pi_{F,\mu\mu} \mathfrak{N}_F \quad , \quad M_F = \Pi_{F,\mu\nu} \mathfrak{N}_F \quad \text{und} \quad N_F = \Pi_{F,\nu\nu} \mathfrak{N}_F$$

als zweite Fundamentalgrößen. Der normierte Flächennormalenvektor hängt natürlich auch von Π_F ab:

$$\mathfrak{N}_F = \frac{\Pi_{F,\mu} \times \Pi_{F,\nu}}{|\Pi_{F,\mu} \times \Pi_{F,\nu}|} \quad .$$

Beide Krümmungsfunktionen K_C und K_F sowie die Betragsfunktion derer Differenzfunktion $K_C - K_F$ sind in Abbildung 5.8 dargestellt. Die Gauß'sche Krümmung der Coonspflaster sieht sehr verzerrt aus, jedoch unterscheiden sich beide Krümmungen betragsmäßig lediglich um den Wert 0,00255.

Da sich die Krümmungen der Coonspflaster und der Rückenoberfläche nur sehr gering unterscheiden, ist auch verständlich, daß die C^2 -Unstetigkeiten an den Pflasterrändern nicht allzu sehr ins Gewicht fallen.

Obwohl das Raster sehr grob gewählt wurde, sind diese Ergebnisse sehr zufriedenstellend. Das bedeutet, daß die Rasterstereographie eine sehr gute Methode ist die Rückenoberfläche mit Hilfe von Coonspflastern darzustellen.

Literatur zu Kapitel 5

- [1] Rössler Helmut/Rüther Wolfgang. *Orthopädie*. Urban & Schwarzenberg Verlag, München 1997.
- [2] Schwab Jürgen. *Der Mensch*. Lingen Verlag, Köln 1984.
- [3] Stoer Josef. *Numerische Mathematik 1*. Springer-Verlag, Heidelberg 1993.

Anhang A

Maple: Rückendarstellung

A.1 Querschnitte

with(plots):

```
x1:=u-> 0-100+200*u:
x2:=u-> 0-100+200*u:
x3:=u-> 8-100+200*u:
x4:=u-> 24-100+200*u:
x5:=u-> 44-100+200*u:
x6:=u-> 44-100+200*u:
x7:=u-> 48-100+200*u:
x8:=u-> 32-100+200*u:
x9:=u-> 8-100+200*u:
x10:=u-> -10-100+200*u:
x11:=u-> -8-100+200*u:

q1:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[20,10,0,10,20],u,cubic):
q2:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[2,-8,-18,-8,2],u,cubic):
q3:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[-6,-14,-24,-14,-1],u,cubic):
q4:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[4,1,-8,5,27],u,cubic):
q5:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[10,15,10,27,60],u,cubic):
q6:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[18,24,20,38,71],u,cubic):
q7:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[25,31,30,51,85],u,cubic):
q8:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[44,41,34,49,74],u,cubic):
q9:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[46,38,28,38,51],u,cubic):
q10:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[37,23,12,21,28],u,cubic):
q11:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[11,-2,-12,-2,6],u,cubic):

spacecurve([x1(u),0,q1(u)],[x2(u),40,q2(u)],[x3(u),80,q3(u)],[x4(u),120,q4(u)], [x5(u),
160,q5(u)],[x6(u),200,q6(u)],[x7(u),240,q7(u)],[x8(u),280,q8(u)],[x9(u),320,q9(u)],[x10(u),
360,q10(u)],[x11(u),400,q11(u)]],u=0..1,color=black,orientation=[-90,45],
scaling=constrained);
```

A.2 Rückenfläche

```

x1:=u-> 0-100+200*u:
x2:=u-> 0-100+200*u:
x3:=u-> 8-100+200*u:
x4:=u-> 24-100+200*u:
x5:=u-> 44-100+200*u:
x6:=u-> 44-100+200*u:
x7:=u-> 48-100+200*u:
x8:=u-> 32-100+200*u:
x9:=u-> 8-100+200*u:
x10:=u-> -10-100+200*u:
x11:=u-> -8-100+200*u:

q1:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[20,10,0,10,20],u,cubic):
q2:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[2,-8,-18,-8,2],u,cubic):
q3:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[-6,-14,-24,-14,-1],u,cubic):
q4:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[4,1,-8,5,27],u,cubic):
q5:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[10,15,10,27,60],u,cubic):
q6:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[18,24,20,38,71],u,cubic):
q7:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[25,31,30,51,85],u,cubic):
q8:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[44,41,34,49,74],u,cubic):
q9:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[46,38,28,38,51],u,cubic):
q10:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[37,23,12,21,28],u,cubic):
q11:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[11,-2,-12,-2,6],u,cubic):

a:=(u,v)->spline([0,40,80,120,160,200,240,280,320,360,400],[x1(u),x2(u),x3(u),x4(u),
x5(u),x6(u),x7(u),x8(u),x9(u),x10(u),x11(u)],v,cubic):

b:=(u,v)->spline([0,40,80,120,160,200,240,280,320,360,400],[q1(u),q2(u),q3(u),q4(u),
q5(u),q6(u),q7(u),q8(u),q9(u),q10(u),q11(u)],v,cubic):

plot3d([a(u,v),v,b(u,v)],u=0..1,v=0..400,orientation=[-90,45],scaling=constrained);

```

Anhang B

Maple: Untersuchung

B.1 Modifiziertes ISIS-Verfahren

Kommentar Dieser Code berechnet die Stellen verschwindender Krümmung sowohl der alpha- als auch der gamma-Funktionen. Mit Hilfe der ersten Ableitungen kann dann der Cobb-Winkel berechnet werden.

```
alphagrob:=x->spline([0,40,80,120,160,200,240,280,320,360,400],[0,0,8,24,44,44,48,32,
8,-10,-8],x,cubic):

alphagrob1:=x->diff(alphagrob(x),x):

alphagrob2:=x->diff(alphagrob(x),x$2):

alphafein:=x->spline([0,20,40,60,80,100,120,140,160,180,200,220,240,260,280,300,320,
340,360,380,400],[0, 0,0,4,8,12,24,36,44,44,44,48,48,40,32,16,8,-6,-10,-10,-8],x,cubic):

alphafein1:=x->diff(alphafein(x),x):

alphafein2:=x->diff(alphafein(x),x$2):

gammagrob:=x->spline([0,40,80,120,160,200,240,280,320,360,400],[0,-18,-24,-8,10,20,30,
34,28,12,-12],x,cubic):

gammagrob1:=x->diff(gammagrob(x),x):

gammagrob2:=x->diff(gammagrob(x),x$2):

gammafein:=x->spline([0,20,40,60,80,100,120,140,160,180,200,220,240,260,280,300,320,
340,360,380,400],[0,-10,-18,-22,-24,-16,-8,0,10,18,20,24,30,32,34,32,28,22,12,0,-12],x,
cubic):

gammafein1:=x->diff(gammafein(x),x):

gammafein2:=x->diff(gammafein(x),x$2):

solve(alphagrob2(x));solve(alphafein2(x));
solve(gammagrob2(x));solve(gammafein2(x));
```

B.2 Sensibilität des Moiré-Verfahrens

```

x1:=u-> 0-100+200*u:
x2:=u-> 0-100+200*u:
x3:=u-> 8-100+200*u:
x4:=u-> 24-100+200*u:
x5:=u-> 44-100+200*u:
x6:=u-> 44-100+200*u:
x7:=u-> 48-100+200*u:
x8:=u-> 32-100+200*u:
x9:=u-> 8-100+200*u:
x10:=u-> -10-100+200*u:
x11:=u-> -8-100+200*u:

q1:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[20,10,0,10,20],u,cubic):
q2:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[2,-8,-18,-8,2],u,cubic):
q3:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[-6,-14,-24,-14,-1],u,cubic):
q4:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[4,1,-8,5,27],u,cubic):
q5:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[10,15,10,27,60],u,cubic):
q6:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[18,24,20,38,71],u,cubic):
q7:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[25,31,30,51,85],u,cubic):
q8:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[44,41,34,49,74],u,cubic):
q9:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[46,38,28,38,51],u,cubic):
q10:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[37,23,12,21,28],u,cubic):
q11:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[11,-2,-12,-2,6],u,cubic):

a:=(u,v)->spline([0,40,80,120,160,200,240,280,320,360,400],[x1(u),x2(u),x3(u),x4(u),
x5(u),x6(u),x7(u),x8(u),x9(u),x10(u),x11(u)],v,cubic):

b:=(u,v)->spline([0,40,80,120,160,200,240,280,320,360,400],[q1(u),q2(u),q3(u),q4(u),
q5(u),q6(u),q7(u),q8(u),q9(u),q10(u),q11(u)],v,cubic):

with(LinearAlgebra):

z:=(u,v)->Vector([a(u,v),v,b(u,v)]):

A:=alpha->Matrix([[cos(alpha),0,-sin(alpha)],[0,1,0],[sin(alpha),0,cos(alpha)]]):

B:=beta->Matrix([[1,0,0],[0,cos(beta),-sin(beta)],[0,sin(beta),cos(beta)]]):

F:=(u,v,alpha,beta)->A(alpha).B(beta).z(u,v):

plot3d(F(u,v,-0.0873,0.0873),u=0..1,v=0..400,orientation=[90,0],scaling=constrained,
contours=15,style=patchcontour);

```


B.3 Rasterstereographie

```

x1:=u-> 0-100+200*u:
x2:=u-> 0-100+200*u:
x3:=u-> 8-100+200*u:
x4:=u-> 24-100+200*u:
x5:=u-> 44-100+200*u:
x6:=u-> 44-100+200*u:
x7:=u-> 48-100+200*u:
x8:=u-> 32-100+200*u:
x9:=u-> 8-100+200*u:
x10:=u-> -10-100+200*u:
x11:=u-> -8-100+200*u:

q1:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[20,10,0,10,20],u,cubic):
q2:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[2,-8,-18,-8,2],u,cubic):
q3:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[-6,-14,-24,-14,-1],u,cubic):
q4:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[4,1,-8,5,27],u,cubic):
q5:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[10,15,10,27,60],u,cubic):
q6:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[18,24,20,38,71],u,cubic):
q7:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[25,31,30,51,85],u,cubic):
q8:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[44,41,34,49,74],u,cubic):
q9:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[46,38,28,38,51],u,cubic):
q10:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[37,23,12,21,28],u,cubic):
q11:=u-> spline([0,2/5,1/2,3/5,1],[11,-2,-12,-2,6],u,cubic):

a:=(u,v)->spline([0,40,80,120,160,200,240,280,320,360,400],[x1(u),x2(u),x3(u),x4(u),
x5(u),x6(u),x7(u),x8(u),x9(u),x10(u),x11(u)],v,cubic):

b:=(u,v)->spline([0,40,80,120,160,200,240,280,320,360,400],[q1(u),q2(u),q3(u),q4(u),
q5(u),q6(u),q7(u),q8(u),q9(u),q10(u),q11(u)],v,cubic):

b1:=t->1-(6*t^5 - 15 * t^4 + 10 * t^3) :

b2:=t->6*t^5 - 15 * t^4 + 10 * t^3 :

av:=diff(a(u,v),v):
avv:=diff(a(u,v),v$2):
bv:=diff(b(u,v),v):
bvv:=diff(b(u,v),v$2):
bu:=diff(b(u,v),u):
buu:=diff(b(u,v),u$2):
buv:=diff(b(u,v),u,v):

db1:=t->-30*t^4 + 60 * t^3 - 30 * t^2 :

ddb1:=t->-120*t^3 + 180 * t^2 - 60 * t :

db2:=t->30*t^4 - 60 * t^3 + 30 * t^2 :

ddb2:=t->120*t^3 - 180 * t^2 + 60 * t :

```

```

senkrecht:=proc()
global Su,Sv,As,Bs;
local m,n,d,h,j;

Su:=array(0..3,0..50):Sv:=array(0..3,0..50):As:=array(0..3,0..50):Bs:=array(0..3,0..50):

for m from 0 to 3 do for n from 0 to 50 do

d:=fsolve({1.3*(m-1.0001)*t=a(u,v),200+1.3/5*(n-25.0001)*t=v,3000-100*t=b(u,v)},
{t, u, v}):
h:=subs(d,u):
j:=subs(d,v):
Su[m,n]:=h:
Sv[m,n]:=j:
As[m,n]:=a(h,j):
Bs[m,n]:=b(h,j):

end do; end do;
end proc:

waagrecht:=proc()
global Wu,Wv,Aw,Bw;
local m,n,d,h,j;

Wu:=array(0..15,0..10):Wv:=array(0..15,0..10):Aw:=array(0..15,0..10):
Bw:=array(0..15, 0..10):

for m from 0 to 15 do for n from 0 to 10 do

d:=fsolve({1.3/5*(m-5.0001)*t=a(u,v),200+1.3*(n-5.0001)*t=v,3000-100*t=b(u,v)},
{t, u, v}):
h:=subs(d,u):
j:=subs(d,v):
Wu[m,n]:=h:
Wv[m,n]:=j:
Aw[m,n]:=a(h,j):
Bw[m,n]:=b(h,j):

end do; end do;
end proc:

vparameter:=proc()
global Pv;
local m,n,zm,zn,tm,tn,om,um,on,un;

Pv:=array(0..15,0..50):

for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do

zm:=floor(m/5):
zn:=floor(n/5):
um:=min(zm,2):
om:=um+1:
un:=min(zn,9):
on:=un+1:

```

```

tm:=m/5-un:
tn:=n/5-un:
Pv[m,n]:=b1(tn)*Wv[m,un]+b2(tn)*Wv[m,on]+b1(tm)*Sv[um,n]+b2(tm)*Sv[om,n]-
b1(tm)*(b1(tn)*Sv[um,5*un]+b2(tn)*Sv[um,5*on])-b2(tm)*(b1(tn)*Sv[om,5*un]+
b2(tn)*Sv[om,5*on]):

end do; end do;
end proc:

acoon:=proc()
global Ages;
local m,n,zm,zn,tm,tn,om,um,on,un;

Ages:=array(0..15,0..50):

for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do

zm:=floor(m/5):
zn:=floor(n/5):
um:=min(zm,2):
om:=um+1:
un:=min(zn,9):
on:=un+1:
tm:=m/5-un:
tn:=n/5-un:
Ages[m,n]:=b1(tn)*Aw[m,un]+b2(tn)*Aw[m,on]+b1(tm)*As[um,n]+b2(tm)*As[om,n]-
b1(tm)*(b1(tn)*As[um,5*un]+b2(tn)*As[um,5*on])-b2(tm)*(b1(tn)*As[om,5*un]+
b2(tn)*As[om,5*on]):

end do; end do;
end proc:

bcoon:=proc()
global Bges;
local m,n,zm,zn,tm,tn,om,um,on,un;

Bges:=array(0..15,0..50):

for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do

zm:=floor(m/5):
zn:=floor(n/5):
um:=min(zm,2):
om:=um+1:
un:=min(zn,9):
on:=un+1:
tm:=m/5-un:
tn:=n/5-un:
Bges[m,n]:=b1(tn)*Bw[m,un]+b2(tn)*Bw[m,on]+b1(tm)*Bs[um,n]+b2(tm)*Bs[om,n]-
b1(tm)*(b1(tn)*Bs[um,5*un]+b2(tn)*Bs[um,5*on])-b2(tm)*(b1(tn)*Bs[om,5*un]+
b2(tn)*Bs[om,5*on]):

end do; end do;
end proc:

```

```

uparameter:=proc()
global Pu;
local m,n,zm,zn,tm,tn,om,um,on,un,loes;

Pu:=array(0..15,0..50):

for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do

zm:=floor(m/5):
zn:=floor(n/5):
um:=min(zm,2):
om:=um+1:
un:=min(zn,9):
on:=un+1:
tm:=m/5-um:
tn:=n/5-un:
loes:=fsolve(a(u,Pv[m,n])=Ages[m,n]):
Pu[m,n]:=loes:

end do; end do;
end proc:

reelldata:=proc()
global RD;
local m,n;

RD:=array(0..15,0..50):

for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do

RD[m,n]:=b(Pu[m,n],Pv[m,n]):

end do; end do;
end proc:

vergleichdata:=proc()
global VD;
local m,n;

VD:=array(0..15,0..50):

for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do

VD[m,n]:=abs(Bges[m,n]-RD[m,n]):

end do; end do;
end proc:

maxvergleichdata:=proc()
local m,n,maxdata;
maxdata:=0;

for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do

if maxdata<VD[m,n] then maxdata:=VD[m,n] end if;

```

```

end do; end do;
print('maxdata',maxdata);
end proc:

senkableit1:=proc()
global Sdv,Sda,Sdb;
local m,n;

Sdv:=array(0..3,0..50):Sda:=array(0..3,0..50):Sdb:=array(0..3,0..50):

for m from 0 to 3 do for n from 0 to 49 do

Sdv[m,n]:=(Sv[m,n+1]-Sv[m,n])/0.2:
Sdv[m,50]:=(Sv[m,50]-Sv[m,49])/0.2:

Sda[m,n]:=(As[m,n+1]-As[m,n])/0.2:
Sda[m,50]:=(As[m,50]-As[m,49])/0.2:

Sdb[m,n]:=(Bs[m,n+1]-Bs[m,n])/0.2:
Sdb[m,50]:=(Bs[m,50]-Bs[m,49])/0.2:

end do; end do;
end proc:

senkableit2:=proc()
global Sddv,Sdda,Sddb;
local m,n;

Sddv:=array(0..3,0..50):Sdda:=array(0..3,0..50):Sddb:=array(0..3,0..50):

for m from 0 to 3 do for n from 1 to 49 do

Sddv[m,0]:=0;
Sddv[m,n]:=(Sdv[m,n]-Sdv[m,n-1])/0.2:
Sddv[m,50]:=0;

Sdda[m,0]:=0;
Sdda[m,n]:=(Sda[m,n]-Sda[m,n-1])/0.2:
Sdda[m,50]:=0;

Sddb[m,0]:=0;
Sddb[m,n]:=(Sdb[m,n]-Sdb[m,n-1])/0.2:
Sddb[m,50]:=0;

end do; end do;
end proc:

waagableit1:=proc()
global Wdv,Wda,Wdb;
local m,n;

Wdv:=array(0..15,0..10):Wda:=array(0..15,0..10):Wdb:=array(0..15,0..10):

for m from 0 to 14 do for n from 0 to 10 do

Wdv[m,n]:=(Wv[m+1,n]-Wv[m,n])/0.2:

```

```

Wdv[15,n]:=(Wv[15,n]-Wv[14,n])/0.2:

Wda[m,n]:=(Aw[m+1,n]-Aw[m,n])/0.2:
Wda[15,n]:=(Aw[15,n]-Aw[14,n])/0.2:

Wdb[m,n]:=(Bw[m+1,n]-Bw[m,n])/0.2:
Wdb[15,n]:=(Bw[15,n]-Bw[14,n])/0.2:

end do; end do;
end proc:

waagableit2:=proc()
global Wddv,Wdda,Wddb;
local m,n;

Wddv:=array(0..15,0..10):Wdda:=array(0..15,0..10):Wddb:=array(0..15,0..10):

for m from 1 to 14 do for n from 0 to 10 do

Wddv[0,n]:=0:
Wddv[m,n]:=(Wdv[m,n]-Wdv[m-1,n])/0.2:
Wddv[15,n]:=0:

Wdda[0,n]:=0:
Wdda[m,n]:=(Wda[m,n]-Wda[m-1,n])/0.2:
Wdda[15,n]:=0:

Wddb[0,n]:=0:
Wddb[m,n]:=(Wdb[m,n]-Wdb[m-1,n])/0.2:
Wddb[15,n]:=0:

end do; end do;
end proc:

ableitcoon:=proc()
global D1Cv,D1Ca,D1Cb,D11Cv,D11Ca,D11Cb,D2Cv,D2Ca,D2Cb,D22Cv,D22Ca,
D22Cb,D12Cv,D12Ca,D12Cb;
local m,n,zm,zn,tm,tn,om,um,on,un;

D1Cv:=array(0..15,0..50):D1Ca:=array(0..15,0..50):D1Cb:=array(0..15,0..50):
D11Cv:=array(0..15,0..50):D11Ca:=array(0..15,0..50):D11Cb:=array(0..15,0..50):
D2Cv:=array(0..15,0..50):D2Ca:=array(0..15,0..50):D2Cb:=array(0..15,0..50):
D22Cv:=array(0..15,0..50):D22Ca:=array(0..15,0..50):D22Cb:=array(0..15,0..50):
D12Cv:=array(0..15,0..50):D12Ca:=array(0..15,0..50):D12Cb:=array(0..15,0..50):

for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do

zm:=floor(m/5):
zn:=floor(n/5):
um:=min(zm,2):
om:=um+1:
un:=min(zn,9):
on:=un+1:
tm:=m/5-um:
tn:=n/5-un:

```

$$\begin{aligned} D1Cv[m,n] := & b1(tn)*Wdv[m,un]+b2(tn)*Wdv[m,on]+db1(tm)*Sv[um,n]+ \\ & db2(tm)*Sv[om,n]-db1(tm)*(b1(tn)*Sv[um,5*un]+b2(tn)*Sv[um,5*on])- \\ & db2(tm)*(b1(tn)*Sv[om,5*un]+b2(tn)*Sv[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D1Ca[m,n] := & b1(tn)*Wda[m,un]+b2(tn)*Wda[m,on]+db1(tm)*As[um,n]+ \\ & db2(tm)*As[om,n]-db1(tm)*(b1(tn)*As[um,5*un]+b2(tn)*As[um,5*on])- \\ & db2(tm)*(b1(tn)*As[om,5*un]+b2(tn)*As[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D1Cb[m,n] := & b1(tn)*Wdb[m,un]+b2(tn)*Wdb[m,on]+db1(tm)*Bs[um,n]+ \\ & db2(tm)*Bs[om,n]-db1(tm)*(b1(tn)*Bs[um,5*un]+b2(tn)*Bs[um,5*on])- \\ & db2(tm)*(b1(tn)*Bs[om,5*un]+b2(tn)*Bs[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D11Cv[m,n] := & b1(tn)*Wddv[m,un]+b2(tn)*Wddv[m,on]+ddb1(tm)*Sv[um,n]+ \\ & ddb2(tm)*Sv[om,n]-ddb1(tm)*(b1(tn)*Sv[um,5*un]+b2(tn)*Sv[um,5*on])- \\ & ddb2(tm)*(b1(tn)*Sv[om,5*un]+b2(tn)*Sv[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D11Ca[m,n] := & b1(tn)*Wdda[m,un]+b2(tn)*Wdda[m,on]+ddb1(tm)*As[um,n]+ \\ & ddb2(tm)*As[om,n]-ddb1(tm)*(b1(tn)*As[um,5*un]+b2(tn)*As[um,5*on])- \\ & ddb2(tm)*(b1(tn)*As[om,5*un]+b2(tn)*As[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D11Cb[m,n] := & b1(tn)*Wddb[m,un]+b2(tn)*Wddb[m,on]+ddb1(tm)*Bs[um,n]+ \\ & ddb2(tm)*Bs[om,n]-ddb1(tm)*(b1(tn)*Bs[um,5*un]+b2(tn)*Bs[um,5*on])- \\ & ddb2(tm)*(b1(tn)*Bs[om,5*un]+b2(tn)*Bs[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D12Cv[m,n] := & db1(tn)*Wdv[m,un]+db2(tn)*Wdv[m,on]+db1(tm)*Sdv[um,n]+ \\ & db2(tm)*Sdv[om,n]-db1(tm)*(db1(tn)*Sv[um,5*un]+db2(tn)*Sv[um,5*on])- \\ & db2(tm)*(db1(tn)*Sv[om,5*un]+db2(tn)*Sv[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D12Ca[m,n] := & db1(tn)*Wda[m,un]+db2(tn)*Wda[m,on]+db1(tm)*Sda[um,n]+ \\ & db2(tm)*Sda[om,n]-db1(tm)*(db1(tn)*As[um,5*un]+db2(tn)*As[um,5*on])- \\ & db2(tm)*(db1(tn)*As[om,5*un]+db2(tn)*As[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D12Cb[m,n] := & db1(tn)*Wdb[m,un]+db2(tn)*Wdb[m,on]+db1(tm)*Sdb[um,n]+ \\ & db2(tm)*Sdb[om,n]-db1(tm)*(db1(tn)*Bs[um,5*un]+db2(tn)*Bs[um,5*on])- \\ & db2(tm)*(db1(tn)*Bs[om,5*un]+db2(tn)*Bs[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D2Cv[m,n] := & db1(tn)*Wv[m,un]+db2(tn)*Wv[m,on]+b1(tm)*Sdv[um,n]+ \\ & b2(tm)*Sdv[om,n]-b1(tm)*(db1(tn)*Sv[um,5*un]+db2(tn)*Sv[um,5*on])- \\ & b2(tm)*(db1(tn)*Sv[om,5*un]+db2(tn)*Sv[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D2Ca[m,n] := & db1(tn)*Aw[m,un]+db2(tn)*Aw[m,on]+b1(tm)*Sda[um,n]+ \\ & b2(tm)*Sda[om,n]-b1(tm)*(db1(tn)*As[um,5*un]+db2(tn)*As[um,5*on])- \\ & b2(tm)*(db1(tn)*As[om,5*un]+db2(tn)*As[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D2Cb[m,n] := & db1(tn)*Bw[m,un]+db2(tn)*Bw[m,on]+b1(tm)*Sdb[um,n]+ \\ & b2(tm)*Sdb[om,n]-b1(tm)*(db1(tn)*Bs[um,5*un]+db2(tn)*Bs[um,5*on])- \\ & b2(tm)*(db1(tn)*Bs[om,5*un]+db2(tn)*Bs[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D22Cv[m,n] := & ddb1(tn)*Wv[m,un]+ddb2(tn)*Wv[m,on]+b1(tm)*Sddv[um,n]+ \\ & b2(tm)*Sddv[om,n]-b1(tm)*(ddb1(tn)*Sv[um,5*un]+ddb2(tn)*Sv[um,5*on])- \\ & b2(tm)*(ddb1(tn)*Sv[om,5*un]+ddb2(tn)*Sv[om,5*on]): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D22Ca[m,n] := & ddb1(tn)*Aw[m,un]+ddb2(tn)*Aw[m,on]+b1(tm)*Sdda[um,n]+ \\ & b2(tm)*Sdda[om,n]-b1(tm)*(ddb1(tn)*As[um,5*un]+ddb2(tn)*As[um,5*on])- \\ & b2(tm)*(ddb1(tn)*As[om,5*un]+ddb2(tn)*As[om,5*on]): \end{aligned}$$

```

D22Cb[m,n]:=ddb1(tn)*Bw[m,un]+ddb2(tn)*Bw[m,on]+b1(tm)*Sddb[um,n]+
b2(tm)*Sddb[om,n]-b1(tm)*(ddb1(tn)*Bs[um,5*un]+ddb2(tn)*Bs[um,5*on])-
b2(tm)*(ddb1(tn)*Bs[om,5*un]+ddb2(tn)*Bs[om,5*on]):

```

```

end do; end do;

```

```

end proc:

```

```

coongauss:=proc()

```

```

  global CoK;

```

```

  local m,n,E,F,G,L,M,N,Betrag;

```

```

  CoK:=array(0..15,0..50):

```

```

  for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do

```

```

    Betrag:=sqrt((D1Cv[m,n]*D2Cb[m,n]-D1Cb[m,n]*D2Cv[m,n])^ 2+
(D1Cb[m,n]*D2Ca[m,n]-D1Ca[m,n]*D2Cb[m,n])^ 2+(D1Ca[m,n]*D2Cv[m,n]-
D1Cv[m,n]*D2Ca[m,n])^ 2):

```

```

    L:=(D11Ca[m,n]*(D1Cv[m,n]*D2Cb[m,n]-D1Cb[m,n]*D2Cv[m,n])+
D11Cv[m,n]*(D1Cb[m,n]*D2Ca[m,n]-D1Ca[m,n]*D2Cb[m,n])+
D11Cb[m,n]*(D1Ca[m,n]*D2Cv[m,n]-D1Cv[m,n]*D2Ca[m,n]))/Betrag:

```

```

    M:=(D12Ca[m,n]*(D1Cv[m,n]*D2Cb[m,n]-D1Cb[m,n]*D2Cv[m,n])+
D12Cv[m,n]*(D1Cb[m,n]*D2Ca[m,n]-D1Ca[m,n]*D2Cb[m,n])+
D12Cb[m,n]*(D1Ca[m,n]*D2Cv[m,n]-D1Cv[m,n]*D2Ca[m,n]))/Betrag:

```

```

    N:=(D22Ca[m,n]*(D1Cv[m,n]*D2Cb[m,n]-D1Cb[m,n]*D2Cv[m,n])+
D22Cv[m,n]*(D1Cb[m,n]*D2Ca[m,n]-D1Ca[m,n]*D2Cb[m,n])+
D22Cb[m,n]*(D1Ca[m,n]*D2Cv[m,n]-D1Cv[m,n]*D2Ca[m,n]))/Betrag:

```

```

    E:=D1Ca[m,n]^ 2+D1Cv[m,n]^ 2+D1Cb[m,n]^ 2:

```

```

    F:=D1Ca[m,n]*D2Ca[m,n]+D1Cv[m,n]*D2Cv[m,n]+D1Cb[m,n]*D2Cb[m,n]:

```

```

    G:=D2Ca[m,n]^ 2+D2Cv[m,n]^ 2+D2Cb[m,n]^ 2:

```

```

    CoK[m,n]:=(L*N-M^ 2)/(E*G-F^ 2)

```

```

  end do; end do;

```

```

end proc:

```

```

reellgauss:=proc()

```

```

  global RK;

```

```

  local m,n,D2a,D22a,D1b,D11b,D2b,D22b,D12b,E,F,G,L,M,N,Betrag;

```

```

  RK:=array(0..15,0..50):

```

```

  for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do

```

```

    D2a:=eval(av,{u=Pu[m,n],v=Pv[m,n]}):
    D22a:=eval(avv,{u=Pu[m,n],v=Pv[m,n]}):
    D1b:=eval(bu,{u=Pu[m,n],v=Pv[m,n]}):
    D11b:=eval(buu,{u=Pu[m,n],v=Pv[m,n]}):
    D12b:=eval(buv,{u=Pu[m,n],v=Pv[m,n]}):
    D2b:=eval(bv,{u=Pu[m,n],v=Pv[m,n]}):

```



```

D22b:=eval(bvv,{u=Pu[m,n],v=Pv[m,n]}):
Betrag:=sqrt(D1b^ 2+(D1b*D2a-200*D2b)^ 2+40000):
L:=200*D11b/Betrag:
M:=200*D12b/Betrag:
N:=(200*D22b-D22a*D1b)/Betrag:
E:=40000+D1b^ 2:
F:=200*D2a+D1b*D2b:
G:=D2a^ 2+1+D2b^ 2:
RK[m,n]:=(L*N-M^ 2)/(E*G-F^ 2)

end do; end do;
end proc:

vergleichgauss:=proc()
global VG;
local m,n;

VG:=array(0..15,0..50):

for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do

VG[m,n]:=abs(CoK[m,n]-RK[m,n]):

end do; end do;
end proc:

maxvergleichgauss:=proc()
local m,n,maxgauss;

maxgauss:=0;

for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do

if maxgauss<VG[m,n] then maxgauss:=VG[m,n] end if;

end do; end do;
print('maxk',maxgauss);
end proc:

with(plots,spacecurve):

reelldataplot:=proc()
local m,n,Q,vert,horiz;
Q:=array(0..15,0..50):vert=array(0..15):horiz:=array(0..50):
for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do
Q[m,n]:=[Ages[m,n],Pv[m,n],RD[m,n]]
end do; end do;
for m from 0 to 15 do vert[m]:=seq(Q[m,n],n=0..50) end do:
for n from 0 to 50 do horiz[n]:=seq(Q[m,n],m=0..15) end do:
spacecurve({seq(vert[m],m=0..15),seq(horiz[n],n=0..50)},color=black,
orientation=[-90,45],scaling=constrained);
end proc:

```

```
coondataplot:=proc()
local m,n,Q,vert,horiz;
Q:=array(0..15,0..50):vert=array(0..15):horiz:=array(0..50):
for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do
Q[m,n]:=[Ages[m,n],Pv[m,n],Bges[m,n]]
end do; end do;
for m from 0 to 15 do vert[m]:=[seq(Q[m,n],n=0..50)] end do:
for n from 0 to 50 do horiz[n]:=[seq(Q[m,n],m=0..15)] end do:
spacecurve({seq(vert[m],m=0..15),seq(horiz[n],n=0..50)},color=black,
orientation=[-90,45],scaling=constrained);
end proc:
```

```
reellgaussplot:=proc()
local m,n,Q,vert,horiz;
Q:=array(0..15,0..50):vert=array(0..15):horiz:=array(0..50):
for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do
Q[m,n]:=[Ages[m,n],Pv[m,n],RK[m,n]]
end do; end do;
for m from 0 to 15 do vert[m]:=[seq(Q[m,n],n=0..50)] end do:
for n from 0 to 50 do horiz[n]:=[seq(Q[m,n],m=0..15)] end do:
spacecurve({seq(vert[m],m=0..15),seq(horiz[n],n=0..50)},color=black,
orientation=[-90,30]);
end proc:
```

```
coongaussplot:=proc()
local m,n,Q,vert,horiz;
Q:=array(0..15,0..50):vert=array(0..15):horiz:=array(0..50):
for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do
Q[m,n]:=[Ages[m,n],Pv[m,n],CoK[m,n]]
end do; end do;
for m from 0 to 15 do vert[m]:=[seq(Q[m,n],n=0..50)] end do:
for n from 0 to 50 do horiz[n]:=[seq(Q[m,n],m=0..15)] end do:
spacecurve({seq(vert[m],m=0..15),seq(horiz[n],n=0..50)},color=black,
orientation=[-90,30]);
end proc:
```

```
vergleichgaussplot:=proc()
local m,n,Q,vert,horiz;
Q:=array(0..15,0..50):vert=array(0..15):horiz:=array(0..50):
for m from 0 to 15 do for n from 0 to 50 do
Q[m,n]:=[Ages[m,n],Pv[m,n],VG[m,n]]
end do; end do;
for m from 0 to 15 do vert[m]:=[seq(Q[m,n],n=0..50)] end do:
for n from 0 to 50 do horiz[n]:=[seq(Q[m,n],m=0..15)] end do:
spacecurve({seq(vert[m],m=0..15),seq(horiz[n],n=0..50)},color=black,
orientation=[-90,30]);
end proc:
```

```
senkrecht();
waagrecht();
vparameter();
acoon();
bcoon();
uparameter();
```

```
reelldata();  
vergleichdata();  
maxvergleichdata();  
senkableit1();  
senkableit2();  
waagableit1();  
waagableit2();  
ableitcoon();  
coongauss();  
reellgauss();  
vergleichgauss();  
maxvergleichgauss();  
reelldataplot();  
coondataplot();  
reellgaussplot();  
coongaussplot();  
vergleichgaussplot();
```